klasyczna definicja prawdopodobieństwa

$$P\left(A\right)=\frac{̿}{̿}$$

prawdopodobieństwo warunkowe

$$P\left(B\right)= \frac{P(A∩B)}{P(B)}, P\left(B\right)\ne 0$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B

## **niezależność zdarzeń**

$$P\left(A∩B\right)= P\left(A\right)∙P(B)$$

więc

$$P\left(B\right)= \frac{P(A∩B)}{P(B)}= \frac{P\left(A\right)∙P(B)}{P(B)}=P(A)$$

co oznacza, że zdarzenie b nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zdarzenia a

permutacje

Korzystamy z permutacji, jeżeli dokonujemy operacji na wszystkich elementach zbioru np.: na ile sposobów można ustawić 3 książki na półce. Odpowiedź: 3! = 1\*2\*3 = 6.

$$P\left(A\right)= n!$$

gdzie *n* określa liczebność zbioru

kombinacje

Korzystamy z kombinacji, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka elementów i ich kolejność nie jest istotna np.: na ile różnych sposobów możemy wybrać 3 osoby spośród 7. Odpowiedź:

$$C\_{7}^{3}=\left(\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right)=\frac{7!}{3!∙\left(7-3\right)!}=\frac{7!}{3!∙4!}=\frac{4!∙5∙6∙7}{3!∙4!}= \frac{5∙6∙7}{6}=5∙7=35$$

$$C\_{n}^{k}=\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

wariacje bez powtórzeń

Korzystamy z wariacji bez powtórzeń, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka niepowtarzalnych elementów i ich kolejność jest istotna np.: ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z dziewięciu ponumerowanych od 1 do 9 drewnianych klocków? Odpowiedź:

$$V\_{9}^{4}=\frac{9!}{\left(9-4\right)!}=\frac{9!}{5!}= \frac{5!∙6∙7∙8∙9}{5!}=6∙7∙8∙9=3024$$

$$V\_{n}^{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

wariacje z powtórzeniami

Korzystamy z wariacji z powtórzeniami, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka elementów, które mogą się powtarzać i ich kolejność jest istotna np.: ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z liczb od 1 do 9? Odpowiedź:

$$W\_{9}^{4}=9^{4}=6561$$

$$W\_{n}^{k}=n^{k}$$

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

schemat bernoulliego

Korzystamy ze schematu bernoulliego w przypadku, gdy przeprowadzamy wiele prób danego doświadczenia (np.: rzut monetą) i chcemy obliczyć prawdopodobieństwo osiągnięcia $k$ sukcesów w $n$ próbach np.: rzucamy 3 razy monetą – jakie jest prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie dokładnie 2 razy: $P\_{3}\left(2\right)= \left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right)∙ \left(\frac{1}{2}\right)^{2}∙\left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)}=3∙\frac{1}{4}∙\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$$P\_{n}\left(k\right)= \left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right) ∙p^{k}∙ q^{n-k}$$

$n$ - liczba prób

$k$ – oczekiwana liczba sukcesów

$p$ - prawdopodobieństwo sukcesu

$q$ - prawdopodobieństwo porażki (1-$p$)

zadania

1. Z okazji zjazdu koleżeńskiego spotyka się 10 osób. Ile nastąpi powitań (uścisków dłoni)?

odp.: szukamy wszystkich możliwych par, a więc kombinacja 2 z 10

1. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij $P\left(n\right)= n!$

ODP.: Dla $n=1$liczba permutacji wynosi 1, a $1!=1$. Zakładamy, że $P\left(n\right)=n!$, więc $P\left(n+1\right)=P\left(n\right)∙\left(n+1\right)=n! ∙\left(n+1\right)=\left(n+1\right)!$

1. DO windy w 8-piętrowym budynku wsiadło 5 osób. Na ile różnych sposobów mogą oni opuścić windę na różnych piętrach?

odp.: $8∙7∙6∙5∙4=6720$

1. W przedziale wagonu kolejowego ustawione są naprzeciw siebie dwie ławki. Każda z ławek posiada 5 ponumerowanych miejsc. Do wagonu wsiada 5 osób, z których 3 zajmują miejsca na jednej z ławek, a 2 pozostałe osoby usiadły na drugiej ławce, naprzeciw 2 osób z pierwszej ławki. ile jest możliwych układów ludzi na ławkach?

odp.: 1 osoba ma 5 możliwości, 2 osoba ma 4 możliwości, 3 osoba ma 3 możliwości, 4 osoba ma 3 możliwości, 5 osoba ma 2 możliwości, czyli $5∙4∙3∙3∙2=360$. Dodatkowo pierwsza osoba może wybrać jedną z dwóch ławek więc ostatecznie $2∙\left(5∙4∙3\right)∙(3∙2)=720$

1. Każdej z 4 osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:
	1. każda z osób mogła się urodzić w dowolnym dniu

odp.: Wariacja z powtórzeniami $W\_{7}^{4}=7^{4}$

* 1. każda z osób urodziła się w innym dniu tygodnia

odp.: Wariacja bez powtórzeń $V\_{7}^{4}=\frac{7!}{\left(7-4\right)!}$

1. Z cyfr: 2, 3, 4, 5, 7 układamy liczby 5-cio cyfrowe o różnych cyfrach. Ile można ułożyć takich liczb, które:
	1. są podzielne przez 3

odp.: liczba jest podzielna przez 3 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, więc 5!

* 1. są podzielne przez 9

odp.: liczba jest podzielna przez 9 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9, więc 0

* 1. są podzielne przez 4

odp.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc xxx32, xxx24, xxx72, xxx52 więc $4∙3!$

1. Liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo w ciąg, który potraktujmy jako liczbę 7-cyfrową (której pierwszą cyfrą nie może być 0). Ile jest możliwych takich ustawień, w których otrzymamy liczbę 7-cyfrową:
	1. dowolną

odp.: wszystkie możliwe oprócz zaczynających się od zera, czyli $7!-6!$

* 1. podzielną przez 4

odp.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52 lub 56. Dla 04, 20, 40 możemy ustawić 5 pierwszy cyfr na 5! sposobów. Dla reszty końcówek początkowe cyfry możemy ustawić na $4∙4!$ sposobów, ponieważ 0 nie może być pierwszą cyfrą. Ostatecznie: $3∙5!+7∙4∙4!$

1. Wyznacz : $\left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)=9$

odp.: $\left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)=\frac{n!}{2!∙\left(n-2\right)!}-\frac{n!}{\left(n-1\right)!}$

skoro

$$n!=n∙\left(n-1\right)!=n ∙\left(n-1\right)∙(n-2)!$$

to

$\frac{n!}{2!∙\left(n-2\right)!}-\frac{n!}{\left(n-1\right)!}=\frac{n∙\left(n-1\right)∙\left(n-2\right)!}{2∙\left(n-2\right)!}-\frac{n!∙\left(n-1\right)!}{\left(n-1\right)!}=\frac{n∙(n-1)}{2}-\frac{n}{1}=\frac{n(n-3)}{2} $= 9

co daje

$$n^{2}-3n-18=0$$

a więc

$$n=6$$

1. Ile jest sposobów ustawienia w szereg pięciu chłopców i czterech dziewczynek tak, aby:
2. chłopcy i dziewczynki stali na zmianę

odp.: $5!∙4!$

1. pierwszy i drugi stał chłopiec

odp.: $\left(\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right)∙2!∙7!$ ponieważ wybieramy 2 chłopców z 5-ciu, daj wybrani mogą się ustawić na dwa sposoby, a pozostałe 7 miejsc to wszystkie możliwe ustawienia w obrębie pozostałych 7 osób

1. najpierw stały dziewczynki , a następnie chłopcy

odp.: $4!∙5!$

1. pierwsza stała dziewczynka

odp.:$\left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right)∙8!$

1. Ile jest liczb trzycyfrowych:
	1. parzystych

odp.: Liczba parzysta wtedy, gdy jej ostatnia cyfra jest parzysta lub jest zerem (2, 4, 6, 8, 0), a więc: $9∙10∙5=450$ ponieważ na pierwszym miejscu nie występuje 0

* 1. podzielnych przez 5

odp.: ostatnia cyfra musi być elementem zbioru {0, 5}, a więc $9∙10∙2=180$

* 1. o tej samej cyfrze setek i jedności

odp.: $9∙10∙1=90$

* 1. większych od 546

odp.: Najpierw od 600 w górę - $4∙10∙10$, pomiędzy 550 i 600 - $1∙5∙10$, pomiędzy 546 i 550 – 3, w sumie: $\left(4∙10∙10\right)+ \left(1∙5∙10\right)+ 3=453$

* 1. mniejszych od 345

odp.: $\left(2∙10∙10\right)+ \left(1∙4∙10\right)+ 5=245$

1. Oblicz liczbę elementów pewnego zbioru skończonego wiedząc, że ma on 79 podzbiorów co najwyżej dwuelementowych.

odp.: $n$ – liczba podzbiorów jednoelementowych, $\left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)$ - liczba podzbiorów dwuelementowych, 1 podzbiór pusty. $n+ \left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)+1=79$, po rozwiązaniu wychodzi $n=12 \bigvee\_{}^{}n=-13$

1. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród nich mają być co najwyżej trzy kiery?

odp.: Wszystkie możliwości, oprócz tych, w których wylosujemy 4 kiery. Różnica pomiędzy wszystkimi kombinacjami, a tymi z 4 kierami: $\left(\begin{matrix}52\\4\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}13\\4\end{matrix}\right)=270010$

1. W pudełku znajduje się 5 kul białych i 4 czarne. Na ile sposobów można wyjąć z pudełka 3 kule tak, aby otrzymać:
	1. 3 kule czarne

odp.: 4

* 1. 3 kule białe

odp.: 10

* 1. dwie kule białe i jedną czarną

odp.: 40

* 1. Co najmniej jedna kulę białą

odp.: zero kul białych – 4, wszystkie możliwości - $\left(\begin{matrix}9\\3\end{matrix}\right)=\frac{9!}{3!∙6!}= \frac{9∙8∙7}{6}=84$, więc 84-4 = 80

1. Używamy 32-kartowej talii, zawierającej osiem kart w czterech kolorach. Starszeństwo kart: as(A), król(K), dama(D), walet(W), dziesiątka(10), dziewiątka(9), ósemka(8), siódemka(7). Grający w jednym rozdaniu pokera otrzymują po pięć kart.
Ile układów kart w pokerze to:
	1. full - trzy karty tej samej wysokości i dwie karty innej

odp.: $\left(\begin{matrix}8\\1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}7\\1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right)=1344$, ponieważ wybieramy z 8 wariantów 1 rodzaj karty, która będzie stanowiła trójkę, a następnie wybieramy 3 konkretne karty, podobnie w drugim przypadku, gdzie jest to rodzaj karty stanowiącej parę – istotna jest kolejność, bo DD888 to co innego niż 88DDD.

* 1. dwie pary - dwie karty tej samej wysokości, dwie innej i ostatnia karta jeszcze innej

odp.: $\left(\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}24\\1\end{matrix}\right)= 12096$

* 1. kareta - cztery karty tej samej wysokości i jedna dowolna z pozostałych

odp.: $\left(\begin{matrix}8\\1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}28\\1\end{matrix}\right)=224$

* 1. kolor - pięć kart w jednym kolorze, ale nie wszystkie kolejno (bez pokerów)

odp.: $\left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}8\\5\end{matrix}\right)-4=208$, ponieważ musimy odjąć 4 pokery

1. Rzucono 3 razy monetą i wypadła nieparzysta liczba orłów (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadły 3 orły (zdarzenie A)?

odp.: $B=\left\{OOO, ORR, RRO, ROR\right\}; A=\left\{OOO\right\}; A∩B=\left\{OOO\right\}$, więc $P\left(B\right)= \frac{̿}{̿}=\frac{1}{4}$

1. Rzucono 2 razy kostką do gry i w pierwszym rzucie wypadło 6 oczek (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w obu rzutach wypadnie co najmniej 10 oczek (zdarzenie A)?

odp.:

$$B=\left\{\left(6,1\right), \left(6,2\right), \left(6,3\right), \left(6,4\right),\left(6,5\right), \left(6,6\right)\right\}; $$

$$A=\left\{\left(6,4\right), \left(4,6\right), \left(6,5\right), \left(5,6\right), \left(6,6\right)\right\};$$

$$A∩B=\left\{\left(6,4\right), \left(6,5\right), \left(6,6\right)\right\}$$

$$̿=36$$

$$P\left(B\right)= \frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P\left(A∩B\right)= \frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$P\left(B\right)= \frac{1}{12}÷\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

1. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania 3 szóstek w 3 rzutach kostką.

odp.: $P\_{3}\left(3\right)=\left(\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{3}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{0}=1⋅ \frac{1}{216}∙1$

1. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 1 króla z tali 52 kart w 5 losowaniach.

odp.: $P\_{5}\left(1\right)= \left(\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right)∙\left(\frac{4}{52}\right)^{1}∙\left(\frac{48}{52}\right)^{4}$

1. Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie 500 orłów w 1000 rzutów monetą, czy uzyskanie 5000 orłów w 10000 rzutów monetą?

odp.:

$$P\_{100}\left(50\right)= \left(\begin{matrix}100\\50\end{matrix}\right)∙\left(\frac{1}{2}\right)^{50}∙\left(\frac{1}{2}\right)^{100-50}≈0,08$$

$$P\_{10}\left(5\right)= \left(\begin{matrix}10\\5\end{matrix}\right)⋅\left(\frac{1}{2}\right)^{5}∙\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5}≈0,24$$

1. Gracz rzuca 2 lotkami do tarczy. Pierwszy rzut był lepszy od drugiego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 3 rzut będzie gorszy od pierwszego?

odp.: Tylko opcje 1, 2 i 4 spełniają warunek, że Rzut 1 jest lepszy niż Rzut 2 (a – najlepszy, b – średni, c – najgorszy)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Opcja 1 | Opcja 2 | Opcja 3 | Opcja 4 | Opcja 5 | Opcja 6 |
| Rzut 1 | A | A | B | B | C | C |
| Rzut 2 | B | C | A | C | A | B |
| Rzut 3 | C | B | C | A | B | A |

Tylko opcje 1 i 2 spełniają trzeci warunek, czyli rzut 3 jest gorszy niż Rzut 1, a więc prawdopodobieństwo jest $\frac{2}{3}$

1. Dwie osoby grają w rosyjską ruletkę 6-strzałowym rewolwerem, w którym znajdują się 3 naboje, załadowane w trzech sąsiednich komorach. Kręcimy bębnem, a następnie gracz A przystawia sobie rewolwer do głowy i strzela, a jeżeli przeżyje to samo robi gracz B (bez kręcenia bębnem). Który gracz ma większe szanse na przeżycie? Gracz pierwszy (A) czy gracz drugi (B)?

odp.: Większe szanse na przeżycie ma gracz B $P\left(B\right)= \frac{4}{6}$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | X | X | O | O | O | Ginie A |
| O | X | X | X | O | O | Ginie B |
| O | O | X | X | X | O | Ginie A |
| O | O | O | X | X | X | Ginie B |
| X | O | O | O | X | X | Ginie A |
| X | X | O | O | O | X | Ginie A |

1. W urnie X mamy: 5 kul białych, 4 czarne, a w urnie Y: 3 kule białe, 1 czarna. Rzucamy symetryczną kostką. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek losujemy 1 kulę z urny X, jeżeli nieparzysta losujemy 1 kulę z urny Y. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

odp.: $P\left(A\right)= \frac{1}{2};P\left(A^{'}\right)= \frac{1}{2};P\left(B\_{X}\right)= \frac{5}{9};P\left(B\_{Y}\right)= \frac{3}{4} $ więc $P= \frac{1}{2}⋅\frac{5}{6}+\frac{1}{2}∙\frac{3}{4}=\frac{10}{24}+\frac{9}{24}=\frac{19}{24}$

1. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?

odp.: $P=\frac{1}{2}$

