Interpretacje i modele

L — język pierwszego rzędu nad alfabetem A

Interpretacja I dla L:

- niepusty zbiór D — **dziedzina** interpretacji
- przypisanie dla każdej stałej $c \in$ A elementu $c_I \in D$
- przypisanie dla każdego n-arg. funktora $f \in A$ funkcji
  $$f_I : D^n \to D$$
- przypisanie dla każdego n-arg. predykatu $p \in A$ relacji
  $$p_I \subseteq D^n$$

wartościowanie zmiennych
funkcja przyporzadkowująca zmiennym alfabetu A elementy dziedziny D

$w : V \to D$, gdzie V — zbiór zmiennych alfabetu A

Niech I — interpretacja, φ — wartościowanie zmiennych,
t — term

znaczenie termu t (oznaczamy przez $\overline{\varphi}_I(t)$):

- jeśli t jest stałą c, to $\overline{\varphi}_I(t) = c_I$
- jeśli t jest zmienną x, to $\overline{\varphi}_I(t) = \varphi(x)$
- jeśli $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, to $\overline{\varphi}_I(t) = f_I(\overline{\varphi}_I(t_1), \ldots, \overline{\varphi}_I(t_n))$

Przykład

A = {zero, s, plus}, gdzie s, plus — funktory (1-arg., 2-arg.)
D = N
I: zero$_I$ = 0 s$_I$(x) = x + 1 plus$_I$(x, y) = x + y

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{t} = \mathrm{plus}(\mathrm{s}(\mathrm{zero}), \mathrm{x})\\
&\overline{\varphi}_I(\mathrm{t}) = \mathrm{plus}_I(\overline{\varphi}_I(\mathrm{s}(\mathrm{zero})), \overline{\varphi}_I(\mathrm{x})) =\\
&\qquad = \overline{\varphi}_I(\mathrm{s}(\mathrm{zero})) + \overline{\varphi}_I(\mathrm{x}) =\\
&\qquad = \mathrm{s}_I(\overline{\varphi}_I(\mathrm{zero})) + \varphi(\mathrm{x}) =\\
&\qquad = \mathrm{s}_I(0) + \varphi(\mathrm{x}) =\\
&\qquad = 1 + \varphi(\mathrm{x})
\end{aligned}
$$

dla wartościowania: $\varphi(\mathrm{x}) = 0$ mamy $\quad \overline{\varphi}_I(t) = 1$

oznaczenia:

$\models_I^\varphi F$ — formuła F jest prawdziwa w interpretacji I dla wartościowania φ

$\not\models_I^\varphi F$ — formuła F jest fałszywa w interpretacji I dla wartościowania φ

znaczenie formuły w interpretacji I dla wartościowania φ

- $\models_I^\varphi p(t_1, \ldots, t_n)$ wiw gdy $(\overline{\varphi}_I(t_1), \ldots, \overline{\varphi}_I(t_n)) \in p_I$
- $\models_I^\varphi true$
- $\not\models_I^\varphi false$
- $\models_I^\varphi \neg F$ wiw gdy $\not\models_I^\varphi F$
- $\models_I^\varphi F \vee G$ wiw gdy $\models_I^\varphi F$ lub $\models_I^\varphi G$
- $\models_I^\varphi \forall x F$ wiw gdy $\models_I^{\varphi[x/d]} F$ dla każdego d $\in$ D

znaczenie pozostałych formuł: poprzez przekształcenie do formuły zawierającej wyłącznie $\neg$, $\vee$ oraz $\forall$

formuła F **jest prawdziwa w interpretacji I** ($\models_I F$) wiw gdy dla każdego wartościowania φ zachodzi $\quad \models_I^\varphi F$

Niech I — interpretacja, S — zbiór formuł
interpretacja I jest **modelem** dla S, jeśli każda formuła z S jest prawdziwa w I

zbiór formuł S ma model — S jest niesprzeczny (spełnialny)
S nie ma modelu — S jest sprzeczny (niespełnialny)

S — zbiór formuł, F — formuła
F jest **logiczną konsekwencją** S wiw gdy F jest prawdziwa w każdym modelu S
zapisujemy: $S \models F$

Twierdzenie
S — zbiór formuł, F — formuła (domknięta)
Formuła F jest logiczną konsekwencją S wiw gdy zbiór formuł $S \cup \{\neg F\}$ jest niespełnialny

Interpretacje i modele Herbranda

L — język pierwszego rzędu, niepusty zbiór stałych

Uniwersum Herbranda U_L
zbiór wszystkich termów ustalonych języka L

Baza Herbranda B_L
zbiór wszystkich ustalonych formuł atomowych utworzonych z predykatów L, których argumentami są termy należące do uniwersum Herbranda

L — język pierwszego rzędu określony przez program P ($L = L_P$)

uniwersum i bazę Herbranda dla P oznaczamy U_P oraz B_P

Interpretacja Herbranda dla L:
interpretacja spełniająca warunki:

- dziedziną interpretacji jest uniwersum Herbranda U_L
- każdej stałej alfabetu przypisana jest ta sama stała
- każdemu funktorowi f przypisana jest funkcja $f_I : U_L^n \to U_L$ taka, że
$$f_I(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$
dla dowolnych termów ustalonych $t_1, \ldots, t_n$
- każdemu predykatowi p przypisana jest relacja p_I będąca podzbiorem U_L^n

interpretacja Herbranda — jednoznacznie określona przez podzbiory bazy Herbranda

model Herbranda dla zbioru formuł S
interpretacja Herbranda, będąca modelem dla S

Twierdzenie
Niech S — zbiór formuł postaci $\forall F$.
Jeśli S ma model, to S ma model Herbranda.

Wniosek
Niech P — program w logice, G — klauzula negatywna.
Jeśli zbiór formuł P $\cup$ {G} jest niesprzeczny, to posiada model Herbranda.

Przykład

Program P: $odd(s(0)) \leftarrow$

$odd(s(s(x))) \leftarrow odd(x)$

$U_P = \{ 0, s(0), s(s(0)), \ldots \}$

$B_P = \{ odd(0), odd(s(0)), odd(s(s(0))), \ldots \}$

Przykładowe interpretacje Herbranda dla programu P:

$I_1 = \emptyset$

$I_2 = \{ odd(s(0)) \}$

$I_3 = \{ odd(s^n(0)) \colon n = 1, 3, 5, \ldots \}$

$I_4 = B_P$

Niech $S = \{ odd(s(0)) \}$.

• interpretacje I_2, I_3, I_4 są modelami dla S $(I_2 \models odd(s(0)))$

• I_2 nie jest modelem dla formuły: $odd(s(s(x))) \leftarrow odd(x)$:
dla wartościowania $\varphi(x) = s(0)$ formuła ta jest fałszywa w I_2

• I_4 jest modelem dla obu formuł

□

modele Herbranda — podzbiory bazy Herbranda
naturalne uporządkowanie modeli — zawieranie się zbiorów

Twierdzenie
Niech P — program w logice,
$\{ M_i \}_{i \in I}$ — niepusty zbiór modeli Herbranda programu P
Wówczas: $\bigcap_{i \in I} M_i$ jest modelem Herbranda programu P.

dla dowolnego programu P: B_P — model Herbranda
istnieje najmniejszy model Herbranda: przecięcie wszystkich modeli, oznaczamy przez M_P

Twierdzenie
Niech P — program w logice. Wówczas:
$\mathrm{M}_P = \{\, A \in B_P : A$ jest logiczną konsekwencją programu $P\,\}$
dowód:
A jest logiczną konsekwencją P
wiw gdy $P \cup \{\neg A\}$ jest niespełnialny
wiw gdy $P \cup \{\neg A\}$ nie ma modelu Herbranda
wiw gdy $\neg A$ jest fałszywe we wszystkich modelach Herbranda P
wiw gdy A jest prawdziwe we wszystkich modelach Herbranda P
wiw gdy $A \in M_P$

$\square$

Operator bezpośredniego wynikania T_P

Niech P — program w logice
2^{B_P} — zbiór wszystkich interpretacji Herbranda programu P
(krata zupełna, porządek częściowy — zawieranie się zbiorów)

$$T_P : 2^{B_P} \to 2^{B_P}$$

I — interpretacja Herbranda programu P

$\mathrm{T}_P(\,\mathrm{I}\,) = \{\, \mathrm{H} \in \mathrm{B}_P : \mathrm{H} \leftarrow B_1, \ldots, B_n$ jest ustaloną klauzulą programu P oraz $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathrm{I}\,\}$

inaczej
$A \in T_P(I)$ wiw gdy istnieje podstawienie θ oraz klauzula z P postaci $B \leftarrow B_1, \ldots, B_n$ takie, że
$A \equiv B\theta$ oraz $\models_I (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)\theta$

$T_P(\,\mathrm{I}\,)$ — operator monotoniczny

Potęgi operatora T_P:

$$T_P \uparrow 0 = \emptyset$$
$$T_P \uparrow (i+1) = T_P(T_P \uparrow i)$$
$$T_P \uparrow \omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_P \uparrow i$$

Przykład

program P: odd(s(0)) $\leftarrow$
odd(s(s(x))) $\leftarrow$ odd(x)

$$T_P \uparrow 0 = \emptyset$$
$$T_P \uparrow 1 = \{odd(s(0))\}$$
$$T_P \uparrow 2 = \{odd(s(0)), odd(s(s(s(0))))\}$$
$$\ldots$$
$$T_P \uparrow \omega = \{odd(s^n(0)) : n = 1, 3, 5, \ldots\}$$

Twierdzenie (M.van Emden, R.Kowalski)
Niech P — program w logice.
Wówczas P posiada model Herbranda spełniający następujące warunki:

- M_P jest najmniejszym modelem Herbranda P
- M_P jest najmniejszym punktem stałym operatora T_P
- $M_P = T_P \uparrow \omega$

T_P — łącznik między deklaratywną a proceduralną semantyką programów w logice

Poprawność SLD-rezolucji

G= $\leftarrow A_1, \ldots, A_k$, $\quad G^{\sim} = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$

Lemat (poprawność jednego kroku SLD-rezolucji)

Jeśli M jest rezolwentą G oraz C przy użyciu θ, to

$$C \models M^{\sim} \rightarrow G^{\sim}\theta$$

Twierdzenie (poprawność SLD-rezolucji, K.Clark)

Niech P — program, G = $\leftarrow A_1, \ldots, A_k$.
Jeśli dla $P \cup \{ G \}$ istnieje SLD-dowód zawierający ciąg podstawień $\theta_1, \ldots, \theta_n$, to

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\,\theta_1 \ldots \theta_n$ jest logiczną konsekwencją P.

szkic dowodu:

Niech $G_0, \ldots, G_n$ — SLD-dowód dla $P \cup \{G\}$,
gdzie $G_0 = G$ i $G_n = \Box$.

Po n-krotnym zastosowaniu lematu uzyskamy:

$$P \models \Box^{\sim} \rightarrow G^{\sim}\theta_1 \ldots \theta_n$$

$\Box$