

1. Bryła sztywna

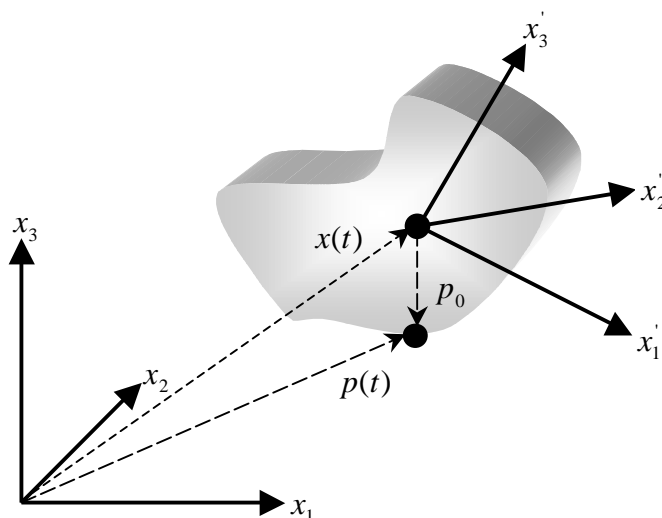
Symulacja komputerowa ruchu bryły sztywnej jest ważnym zagadnieniem podczas modelowania i weryfikacji różnych systemów fizycznych. Mówiąc bryła sztywna, mamy na myśli bryłę, która nie ulega deformacji, co w szczególności oznacza, że jej objętość pozostaje niezmienna. Zakładamy, że podczas symulacji ruchu brył sztywnych, ciała nie przenikają się, a kiedy nastąpi kontakt, bryły albo się od siebie odbijają albo skleją się.

Podczas symulacji komputerowych stajemy przed wieloma problemami, a jednym z nich jest fakt, że symulowany świat rzeczywisty, z naszego punktu widzenia, składa się z obiektów ciągłych, podczas gdy świat odtwarzany przy pomocy komputera jest dyskretny.

Dla uproszczenia procesu obliczeń poczynimy następujące założenia:

- obiekty są sztywne,
- obiekty są jednorodne, czyli ich gęstość jest wielkością stałą.

1.1. Układ współrzędnych



Rysunek 1. Globalny układ współrzędnych (przestrzeń świata) zdefiniowany przez osie x_1, x_2, x_3 . Lokalny układ bryły zdefiniowany przez osie x'_1, x'_2, x'_3 . Punkt p_0 jest opisany w układzie bryły. Punkt $p(t)$ to punkt p_0 w układzie odniesienia świata.

Położenie punktu w przestrzeni w chwili czasowej t może być opisane jako wektor $\mathbf{x}(t)$, reprezentujący przemieszczenie punktu od środka układu współrzędnych. Bryła sztywna jest obiektem bardziej skomplikowanym, oprócz możliwości przemieszczania może się również obracać. Aby zlokalizować bryłę sztywną w przestrzeni świata użyjemy wektora $\mathbf{r}(t)$, opisującego przemieszczenie ciała. Dodatkowo musimy opisać obrót ciała, poprzez macierz obrotu $\hat{\mathbf{R}}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. wektor $\mathbf{x}(t)$ oraz macierz obrotu $\hat{\mathbf{R}}(t)$ będziemy nazywali zmiennymi przestrzennymi bryły sztywnej.

W odróżnieniu od punktu, bryła sztywna posiada objętość (wypełnia pewien obszar w przestrzeni) oraz posiada określony kształt. Zdefiniujemy układ współrzędnych związany z bryłą sztywną z początkiem w środku masy bryły $(0, 0, 0)$.

Przyjmijmy, że $\hat{\mathbf{R}}(t)$ opisuje obrót bryły względem środka masy, wtedy wektor \mathbf{r} zdefiniowany w przestrzeni bryły możemy opisać po obrocie w przestrzeni świata jako $\hat{\mathbf{R}}(t)\mathbf{r}$ w chwili t . Podobnie jeżeli p_0 jest ustalonym punktem w przestrzeni bryły, jego położenie w przestrzeni świata $p(t)$ otrzymamy obracając go i przemieszczając o wektor $\mathbf{x}(t)$

$$p(t) = \hat{\mathbf{R}}(t)p_0 + \mathbf{x}(t)$$

Ponieważ środek masy leży w środku układu współrzędnych związanego z bryłą, położenie środka masy względem przestrzeni świata jest zawsze opisane poprzez wektor $\mathbf{x}(t)$. Możemy powiedzieć, że $\mathbf{x}(t)$ jest położeniem środka masy w przestrzeni świata w chwili czasowej t . Rozważmy wektor w przestrzeni bryły np. $(1, 0, 0)$. W chwili czasowej t . Kierunek tego wektora w przestrzeni świata możemy opisać jako:

$$\hat{\mathbf{R}}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wypisując składowe macierzy $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Orientację osi układu związanego z bryłą (x'_1, x'_2, x'_3) względem przestrzeni świata, otrzymamy mnożąc macierz obrotu $\hat{\mathbf{R}}(t)$ przez kolejne wersory układu współrzędnych:

$$\hat{\mathbf{R}}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}$$

Analogicznie postępujemy dla:

$$\begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

Macierz $\hat{\mathbf{R}}$ jest macierzą obrotu o rozmiarach 3×3 , która pomnożona przez współrzędne punktu, daje jego współrzędne po obroceniu go wokół wyróżnionej osi, czyli:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \tag{1}$$

Macierze obrotów wokół osi, x_1, x_2, x_3 o kąt $\boldsymbol{\theta} = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ wyglądają następująco:

$$\hat{\mathbf{R}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Tworząc złożenia powyższych macierzy, można otrzymać macierz opisującą różne skomplikowane obroty. Robi się to mnożąc macierze (ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne wynika z tego, iż kolejność obrotów też nie jest przemienne), a więc np.

$$\hat{\mathbf{R}}_1 \cdot \hat{\mathbf{R}}_2 \neq \hat{\mathbf{R}}_2 \cdot \hat{\mathbf{R}}_1. \quad (5)$$

Zadanie sprawdzić wzór (5).

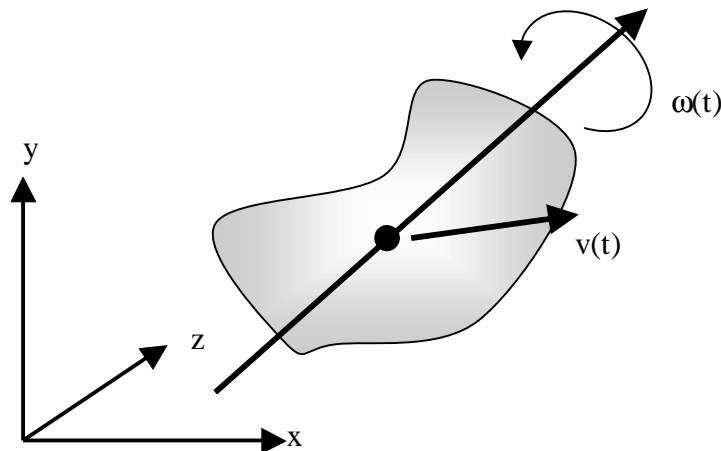
1.2. Prędkość

Niech $\mathbf{v}(t)$ oznacza zmianę położenia $d\mathbf{x}$ punktu $\mathbf{x}(t)$ w czasie dt :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \quad (6)$$

Wielkość \mathbf{v} nazywamy liniową prędkością ciała. Jeśli ciało jest sztywne, to jest ona jednakowa dla wszystkich punktów ciała, a więc jest to również prędkość środka masy.

Podczas ruchu, bryła sztywna może również obracać się. Zakładamy tu, że obrót następuje względem osi przechodzącej przez środek masy. Oś można reprezentować jako wektor, gdzie długość tego wektora określa prędkość ruchu obrotowego. Kierunek wektora definiuje oś względem, której bryła obraca się. Jest to tak zwana prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$



Rysunek 2. $\mathbf{v}(t)$ – prędkość liniowa, $\boldsymbol{\omega}(t)$ – prędkość kątowa

Jeśli wektor \mathbf{r} obraca się ze stałą prędkością kątową, wtedy jego pochodna względem czasu przy założeniu niezmienności globalnych współrzędnych jest następująca:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

gdy długość \mathbf{r} nie zmienia się, różniczka ulega uproszczeniu do:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Wykorzystując ten związek, zależność między macierzą obrotu $\hat{\mathbf{R}}$ i prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ ciała wyraża się wzorem:

$$\frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dt} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}\hat{\mathbf{R}} \quad (7)$$

gdzie $\boldsymbol{\Omega}$ jest macierzą skośną zbudowaną ze składowych wektora prędkości kątowej:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

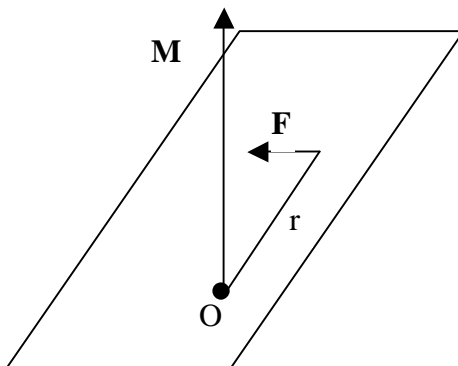
W symulacji znamy początkową postać macierzy obrotu, więc łatwo możemy otrzymać jej bieżącą postać, korzystając z tego, że w każdym kroku obliczamy prędkość kątową.

1.3. Przyspieszenie

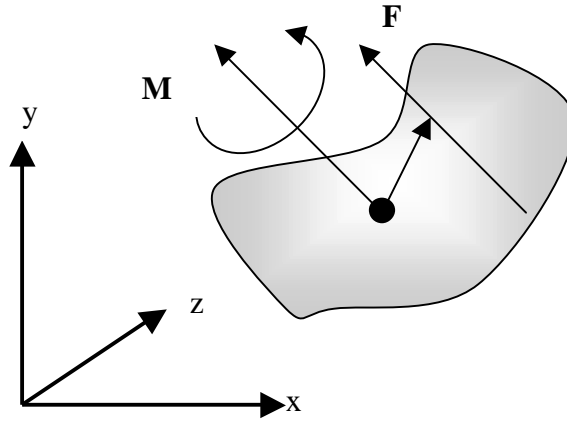
Teraz musimy odpowiedzieć na pytanie, jak zmieniają się prędkości (liniowe oraz kąto-
we) w czasie. Zmiany prędkości liniowej wywołuje działająca siła, a zmiany prędkości
obrotowej wywołuje moment siły. Moment siły (moment obrotowy) działający na
ciało jest dany następującym równaniem:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (9)$$

Wektor momentu siły zaczepiony jest w punkcie O , a jego kierunek jest prostopadły
do kierunku płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \mathbf{F} i \mathbf{r} (rys. 3) gdzie \mathbf{M} – moment
siły, \mathbf{F} – siła, \mathbf{r} – ramię siły.



Rysunek 3. Moment siły



Rysunek 4. Siła i moment siły

gdy działająca siła jest przyłożona do punktu \mathbf{r}_i (gdzie \mathbf{r}_i – współrzędne dowolnego punktu należącego do bryły), moment siły działający na ciało dany jest wzorem:

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{x}) \times \mathbf{F}_i \quad (10)$$

Gdy siła jest przyłożona do środka masy, moment siły zanika (gdyż wtedy ramię siły $\mathbf{r} = 0$). Całkowita siła działająca na ciało to:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (11)$$

W prostokątnym globalnym układzie współrzędnych możemy wektor położenia, siły i momentu siły zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= M_1\mathbf{i} + M_2\mathbf{j} + M_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Wektor \mathbf{r} o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) opisują w układzie współrzędnych położenie punktu przyłożenia siły \mathbf{F} względem osi obrotu. Współrzędne wektora momentu siły \mathbf{M} wyliczamy, korzystając ze wzoru (9)

$$\begin{aligned} M_1 &= x_2F_3 - x_3F_2 \\ M_2 &= x_3F_1 - x_1F_3 \\ M_3 &= x_1F_2 - x_2F_1 \end{aligned}$$

Załóżmy, że oś obrotu przechodzi przez środek masy ciała. Moment pędu ciała jest sumą liczonych względem osi obrotu momentów pędu wszystkich cząsteczek tego ciała. Można to wyrazić wzorem:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (12)$$

gdzie i – numer cząsteczki ciała, $\boldsymbol{\omega}$ – prędkość kątowa ciała względem rozważanej osi, $\mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$ – moment pędu i -tej cząsteczki, a jego wartość wynosi $m_i\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i^2$.

Wynika to z tożsamości wektorowej $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Moment pędu i -tej cząsteczki wynosi:

$$\mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] = m_i \boldsymbol{\omega} r_i^2 \quad (13)$$

gdź iloczyn skalarny $\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega} = 0$ z powodu prostopadłości tych wektorów.

$$\mathbf{L} = \int_V \boldsymbol{\omega} r^2 dm \quad (14)$$

Prędkość kątowna wszystkich cząsteczek ciała sztywnego jest taka sama otrzymujemy:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int_V r^2 dm \quad (15)$$

gdzie V – objętość zajmowana przez ciało¹.

Moment bezwładności to miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym. Im większy moment bezwładności tym trudniej rozkręcić dane ciało lub zmniejszyć jego prędkość obrotową.

$$\hat{\mathbf{I}} = \sum_i m_i r_i^2 \quad (16)$$

Dla ciała sztywnego, które nie składa się z oddzielonych mas punktowych, lecz ma ciągły (jednorodny) rozkład masy, wyrażenie określające moment bezwładności jest bardziej złożone. Niech ciało będzie podzielone na nieskończenie małe elementy o równych masach dm , oraz niech r oznacza odległość każdego takiego elementu od osi obrotu. W takim przypadku moment bezwładności otrzymać można z wyrażenia:

$$\hat{\mathbf{I}} = \int r^2 dm \quad (17)$$

gdzie całkowanie jak zwykle odbywa się po całej objętości ciała.

1.4. Pęd

Pęd ciała jest zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}, \quad M = \sum m_i \quad (18)$$

gdzie M – całkowita masa ciała.

Pęd punktu materialnego jest równy iloczynowi masy m i jego prędkości \mathbf{v} . Pęd jest wielkością wektorową: kierunek i zwrot pędu jest zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora prędkości.

Siła jest zmianą pędu ciała w czasie, czyli:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (19)$$

Jest to II prawo dynamiki Newtona.

¹ w dalszym tekście opuszczamy V przy całkach objętościowych

1.5. Tensor momentu bezwładności

Tensor momentu bezwładności jest macierzą o wymiarze 3×3 . Występuje on w równaniu wiążącym moment pędu z prędkością kątową dla danego ciała:

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \quad (20)$$

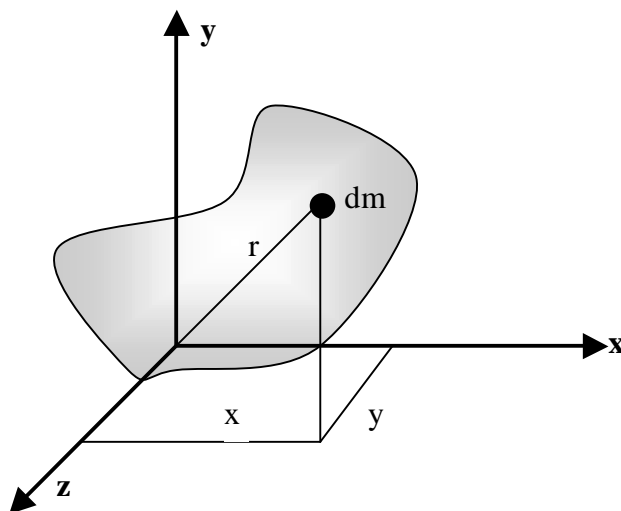
gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ – tensor momentu bezwładności. Macierz ta obliczana jest w przestrzeni bryły i jest zdefiniowana:

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Aby zrozumieć, skąd się bierze ta macierz, powróćmy do równania ruchu obrotowego:

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm \quad (22)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ – prędkość kątowa obrotu ciała, \mathbf{r} – wektor położenia elementu masy dm względem środka ciężkości, $\mathbf{r} \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm$ – wektor momentu pędu danego elementu masy.



Rysunek 5. Obliczanie momentu bezwładności

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$$

Rozpisując podwójny iloczyn wektorowy na współrzędne wektorów, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \int &= \{[(x_2^2 + x_3^2)\omega_1 - x_1x_2\omega_2 - x_1x_3\omega_3]\mathbf{i} + \\ &+ [-x_2x_1\omega_1 + (x_3^2 + x_1^2)\omega_2 - x_2x_3\omega_3]\mathbf{j} + \\ &+ [-x_3x_1\omega_1 - x_3x_2\omega_2 + (x_1^2 + x_2^2)\omega_3]\mathbf{k}\}dm \end{aligned}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int (x_2^2 + x_3^2) dm & (23) \\
 I_{22} &= \int (x_3^2 + x_1^2) dm \\
 I_{33} &= \int (x_1^2 + x_2^2) dm \\
 I_{12} &= I_{21} = \int (x_1 x_2) dm \\
 I_{13} &= I_{31} = \int (x_1 x_3) dm \\
 I_{23} &= I_{32} = \int (x_2 x_3) dm
 \end{aligned}$$

Wyrażenia te są całkami objętościowymi. W przypadku gdy bryła ma prostą geometrię jak sześcian, sfera czy cylinder, wyrażenia te łatwo wyliczyć. W przypadku skomplikowanych geometrii, potrzebne jest zastosowanie metod numerycznych.

Po podstawieniu wyrażeń (23) do wzoru na moment pędu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= [I_{11}\omega_1 - I_{12}\omega_2 - I_{13}\omega_3] \mathbf{i} + \\
 &+ [-I_{21}\omega_1 - I_{22}\omega_2 - I_{23}\omega_3] \mathbf{j} + \\
 &+ [-I_{31}\omega_1 - I_{32}\omega_2 - I_{33}\omega_3] \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

2. Zmiana stanu układu – implementacja komputerowa

Stan $Y(t)$, w jakim znajduje się bryła sztywna w chwili t , można przedstawić w następujący sposób:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{R}}(t) \\ P(t) \\ \mathbf{L}(t) \end{pmatrix}$$

Znając stan $Y(t)$, możemy obliczyć inne potrzebne wielkości:

$$\hat{\mathbf{I}}^{-1}(t) = \hat{\mathbf{R}}(t) \hat{\mathbf{I}}_{bryly}^{-1} \hat{\mathbf{R}}(t)^T$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}^{-1}$ – odwrotność momentu bezwładności.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \frac{P(t)}{M} \\
 \boldsymbol{\omega}(t) &= \hat{\mathbf{I}}^{-1}(t) \mathbf{L}(t) \\
 \frac{d}{dt} Y(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{R}}(t) \\ P(t) \\ \mathbf{L}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) R(t) \\ F(t) \\ M(t) \end{pmatrix} & (24)
 \end{aligned}$$

Równanie (24), jest równaniem różniczkowym, które musimy rozwiązać w celu obliczenia położenia i orientacji bryły sztywnej w różnych chwilach czasowych. Równanie będziemy rozwiązywali numerycznie stosując prostą metodę Eulera. Ponieważ nie znamy dokładnego rozwiązania równania różniczkowego. Nowy stan otrzymamy na podstawie stanu poprzedniego plus rozmiar kroku czasowego przemnożony przez pochodną z kroku poprzedniego.

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + h * Y'[Y(t_i)]$$

gdzie h – wielkość kroku czasowego. Niestety metoda Eulera jest niewystarczająca dla stabilnej symulacji (wprowadza zbyt duży błąd obliczeniowy). Jedną z możliwości poprawienia rozwiązania jest zastosowanie lepszej metody numerycznej. Możemy zastosować metodę Heuna zwaną niekiedy ulepszoną metodą Eulera.

$$Y(t_{i+1}) = Y(t) + \frac{h}{2} * \left(Y' \left[Y(t) + hY'[Y(t)] \right] \right)$$

3. Zastosowanie kwaternionów zamiast macierzy obrotu

Kwaternion jednostkowy może zostać zastosowany do reprezentacji obrotu wokół osi w przestrzeni trój-wymiarowej. Zaletą zastosowania kwaternionów jest to, że zawierają taką samą ilość informacji co macierz obrotu, ale potrzeba tylko czterech parametrów do opisanego tego obrotu. Macierz obrotu zawiera dziewięć elementów do opisanego trzech punktów swobody.

Kwaternion składa się z dwóch elementów, gdzie jeden jest skalarą a drugi wektorem trzy-elementowym:

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, q_x, q_y, q_z] \quad (25)$$

gdzie \mathbf{v} – wektor $q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$, a s – skalar.

Kwaterniony są rozszerzeniem liczb zespolonych, Liczby zespolone zawierają parametr i :

$$i * i = -1$$

W kwaternionach rozszerzono koncepcję pierwiastka z -1 do trzech pierwiastków z -1 , określanym jako $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} * \mathbf{i} &= -1 \\ \mathbf{j} * \mathbf{j} &= -1 \\ \mathbf{k} * \mathbf{k} &= -1 \end{aligned}$$

Mnożenie par tych elementów zachowuje się podobnie do liczenia iloczynu wektorowego typowych trzech osi trójwymiarowej przestrzeni:

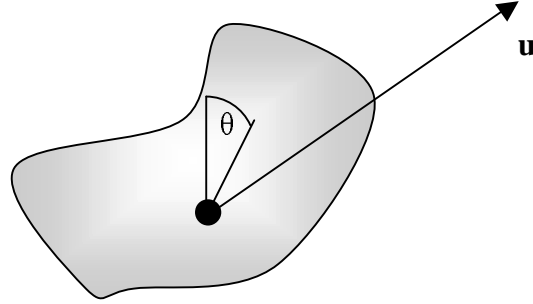
$$\begin{aligned} \mathbf{i} * \mathbf{j} &= -\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} * \mathbf{k} &= -\mathbf{k} * \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} * \mathbf{i} &= -\mathbf{i} * \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned}$$

Tylko kwaterniony jednostkowe definiują obroty, musi on spełniać warunek:

$$s^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$$

Przy obrocie o kąt θ wokół osi reprezentowanej przez jednostkowy wektor \mathbf{u} (gdzie $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$) kwaternion określający ten obrót może zostać zapisany w postaci:

$$q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{u}]$$



Rysunek 6. Kwaternion reprezentujący obrót

Na rysunku 6 zaprezentowano kwaternion obrotu dla dowolnego ciała sztywnego obracającego się wokół osi wyznaczonej przez wektor \mathbf{u} przechodzącej przez środek masy.

Mnożenie dwóch kwaternionów jest zdefiniowane następująco:

$$[s_1, \mathbf{v}_1] * [s_2, \mathbf{v}_2] = [s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] \quad (26)$$

Użycie kwaternionów w symulacji komputerowej do reprezentacji orientacji ciała sztywnego przypomina, użycie w tym celu macierzy obrotu. Najpierw tworzymy kwaternion opisujący orientację początkową ciała w chwili t_0 . Potem w każdym kolejnym kroku czasowym uaktualniamy orientację ciała, korzystając z wektora prędkości kątowej wyliczonego w danym kroku. Równanie różniczkowe łączące reprezentujący orientację kwaternion z wektorem prędkości kątowej bardzo przypomina analogiczne równanie dla macierzy obrotu (7) i ma postać:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{q} \quad (27)$$

Tutaj prędkość kątowa, przedstawiona jako kwaternion, ma postać $[0, \boldsymbol{\omega}]$ i jest zapisana w zewnętrznym nieruchomym układzie współrzędnych. Jeżeli $\boldsymbol{\omega}$ zostanie zapisane w lokalnym układzie współrzędnych związanym z obracającym się ciałem (przestrzeni bryły sztywnej), należy użyć równania:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\omega}$$

Z kwaternionu możemy skonstruować macierz obrotu:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\mathbf{v}_y^2 - 2\mathbf{v}_z^2 & 2\mathbf{v}_x\mathbf{v}_y - 2s\mathbf{v}_z & 2\mathbf{v}_x\mathbf{v}_z - 2s\mathbf{v}_y \\ 2\mathbf{v}_x\mathbf{v}_y + 2s\mathbf{v}_z & 1 - 2\mathbf{v}_x^2 - 2\mathbf{v}_z^2 & 2\mathbf{v}_y\mathbf{v}_z - 2s\mathbf{v}_x \\ 2\mathbf{v}_x\mathbf{v}_z - 2s\mathbf{v}_y & 2\mathbf{v}_y\mathbf{v}_z + 2s\mathbf{v}_x & 1 - 2\mathbf{v}_x^2 - 2\mathbf{v}_y^2 \end{pmatrix}$$

Analogicznie do macierzy obrotu, kwaterniony mogą być stosowane do obracania punktów lub wektorów. Jeżeli \mathbf{v} jest wektorem przed obrotem, a \mathbf{v}' – wektorem obróconym przez kwaternion \mathbf{q} , zależność między nimi wyraża się wzorem:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^* \quad (28)$$

gdzie \mathbf{q}^* jest kwaternionem sprzężonym z kwaternionem \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}^* = s - q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k} \quad (29)$$

Stan układu $Y(t)$, możemy zapisać zastępując macierz obrotu reprezentacją kwaternionową:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{q} \\ P(t) \\ \mathbf{L}(t) \end{pmatrix}$$

czyli:

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \frac{1}{2}[0, \boldsymbol{\omega}] \\ \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{pmatrix}$$

4. Poduszkowiec

przypomnijmy, że druga zasada dynamiki Newtona opisuje ruch ciała, i wyraża się wzorem:

$$F = ma \quad (30)$$

Jeżeli mamy do czynienia z ciałem sztywnym musimy pamiętać, że działające na nie siły będą powodowały nie tylko jego ruch postępowy, ale również obrotowy.

Ruch obrotowy to taki ruch, w którym wszystkie punkty bryły sztywnej poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej zwanej osią obrotu. Np. ruch Ziemi wokół własnej osi. Jest to ruch złożony z ruchu postępowego środka masy danego ciała oraz ruchu obrotowego względem pewnej osi. Środek masy ciała można uważać za punkt materialny. Do opisanie ruchu obrotowego używa się odmiennych pojęć od używanych do opisanie ruchu postępowego.

Druga zasada dynamiki jest podstawowym prawem ruchu obrotowego.

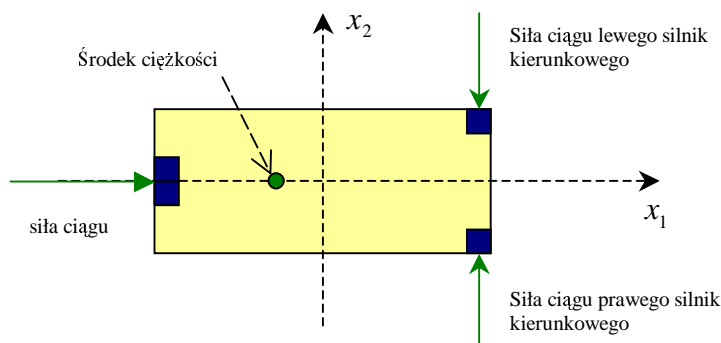
$$r \times F = M = \frac{dL}{dt} \quad (31)$$

gdzie M jest momentem siły względem obranego punktu odniesienia, a L – krętem (momentem pędu) względem tego samego punktu odniesienia.

Jeżeli obrót odbywa się względem osi stałej lub sztywnej wówczas druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego może być napisana w następujący sposób:

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon \quad (32)$$

gdzie ε – przyspieszenie kątowe, ω – prędkość kątowa, I – moment bezwładności.



Rysunek 7. Schematyczny model poduszki

Podczas symulacji ruchu poduszki musimy w pierwszym kroku obliczyć wypadkowe siły oraz momenty sił działające na ciało, uwzględniając również opór aerodynamiczny.

Zacznijmy od policzenia sił i momentów sił generowanych przez silniki napędowe. oznaczmy F_w jako wypadkową siłę działającą na poduszkowca, oraz M_w jako wypadkowy moment siły działający na poduszkowca. Dodatkowo F_c – siła generowana przez silnik tylny znajdujący się na osi x_1 , F_l – siła generowana przez lewy silnik znajdujący się z przodu z lewej strony poduszki, F_p – siła generowana przez prawy silnik.

Znamy siłę ciągu generowaną przez poszczególne silniki, możemy więc zapisać:

$$F_w = F_c + F_l + F_p \quad (33)$$

Oznaczmy położenie silników w układzie związanym z poduszkowcem jako: r_c – położenie silnika tylnego, r_l – położenie lewego silnika, r_p – położenie prawego silnika.

Przypomnijmy, że gdyby siła przyłożona była do środka masy, moment siły wynosił by zero. Ponieważ w naszym przypadku silniki nie są umieszczone w środku ciężkości, moment siły policzymy jako iloczyn wektorowy działającej siły i ramienia (czyli w naszym przypadku wektora opisującego położenie danego silnika).

$$M_c = r_c \times F_c \quad (34)$$

$$M_l = r_l \times F_l \quad (35)$$

$$M_p = r_p \times F_p \quad (36)$$

oraz wypadkowy moment siły:

$$M_w = M_c + M_l + M_p \quad (37)$$

Siła wypadkowa działająca na ciało została policzona w lokalnym układzie związanym z ciałem, należy ją przetransformować do układu współrzędnych świata, dokonując obrotu wektora siły wypadkowej.

Po wyznaczeniu sił oraz momentów sił należy scałkować równanie ruchu postępowego oraz obrotowego i wyznaczyć nową prędkość liniową, kątową oraz położenie.

Rozpoczynamy od wyznaczenia przyspieszenia liniowego:

$$a = \frac{F_w}{m}$$

następnie korzystając z zależności

$$\frac{dv}{dt} = a$$

wyznaczamy zmianę prędkości $dv = a * dt$ i wyznaczamy prędkość w kroku $n + 1$ jako:

$$v_{n+1} = v_n + dv$$

Wyznaczamy w kolejnym kroku nowe położenie obiektu wyznaczając zmianę podłożenia korzystając z zależności

$$\frac{ds}{dt} = v$$

czyli zmiana położenia $= v * dt$ i znając położenie w chwili n wynoszącą s_n wyznaczamy nowe położenie

$$s_{n+1} = s_n + ds$$

Kolejnym krokiem jest całkowanie równań ruchu obrotowego.

Wyznaczamy przyspieszenie kątowe ε , obrót odbywa się względem stałej osi więc druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego sprowadza się do postaci:

$$M = I\varepsilon$$

gdzie M – moment wypadkowy, I – moment bezwładności, ε – przyspieszenie kątowe.

Czyli $\varepsilon = MI^{-1}$, zmiana prędkości kątowej $d\omega$ w czasie oznacza przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

czyli

$$d\omega = \varepsilon * dt$$

Znając zmianę prędkości kątowej możemy obliczyć nową prędkość kątową w chwili $n + 1$ jako

$$\omega_{n+1} = \omega_n + d\omega$$

znając nową prędkość kątową możemy wyznaczyć zmianę kąta korzystając z zależności, że zmiana kąta w czasie oznacza prędkość kątową czyli

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

czyli

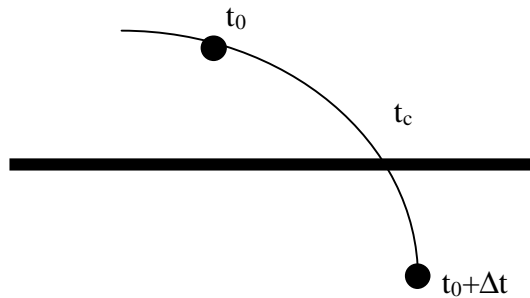
$$d\theta = \omega * dt$$

znając przyrost kąta możemy wyznaczyć nową orientację ciała

$$\theta_{n+1} = \theta_n + d\theta$$

5. Kolizje oraz siły kontaktu

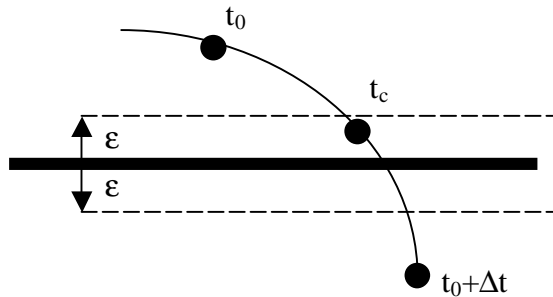
Ważnym elementem podczas symulacji bryły sztywnej jest sytuacja kontaktu dwóch brył oraz ich kolizja. Aby można było wyznaczyć siły jakie działają na bryły w momencie kolizji, trzeba najpierw wykryć sytuację wystąpienia kolizji. Skupimy się wyłącznie na bryłach będącymi wielościanami wypukłymi. W pierwszym kroku przyjrzymy się wierzchołkowi wielościanu (na rysunku (8) reprezentowanym przez punkt) kolidującemu z płaszczyzną.



Rysunek 8. Kolizja punkt - płaszczyzna

Na rysunku 8 widać, że w chwili t_0 kolizja jeszcze nie nastąpiła. Kiedy wykonamy jeden krok obliczeniowy (krok czasowy Δt) punkt znajduje się poniżej płaszczyzny. Kolizja powinna wystąpić w chwili t_c , która jest pomiędzy t_0 a $t_0 + \Delta t$. Ponieważ nie wiemy jak zachował się punkt w czasie pomiędzy t_0 i $t_0 + \Delta t$ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć analitycznie czasu t_c .

Zazwyczaj w celu poradzenia sobie z tym problemem wykorzystujemy metodę bisekcji. Sprawdzimy zachowanie punktu w chwili czasowej $t_0 + \frac{1}{2}\Delta t$. Jeśli i w tym przypadku punkt znajdzie się poniżej płaszczyzny sprawdzimy położenie w chwili czasowej $t_0 + \frac{1}{4}\Delta t$, jeśli jednak nie nastąpi penetracja w chwili czasowej $t_0 + \frac{1}{2}\Delta t$ sprawdzimy położenie punktu w chwili czasowej $t_0 + \frac{3}{4}\Delta t$. Będziemy tak postępowali aż do momentu kiedy punkt nie znajdzie się w pewnym przedziale tolerancji ϵ od płaszczyzny.



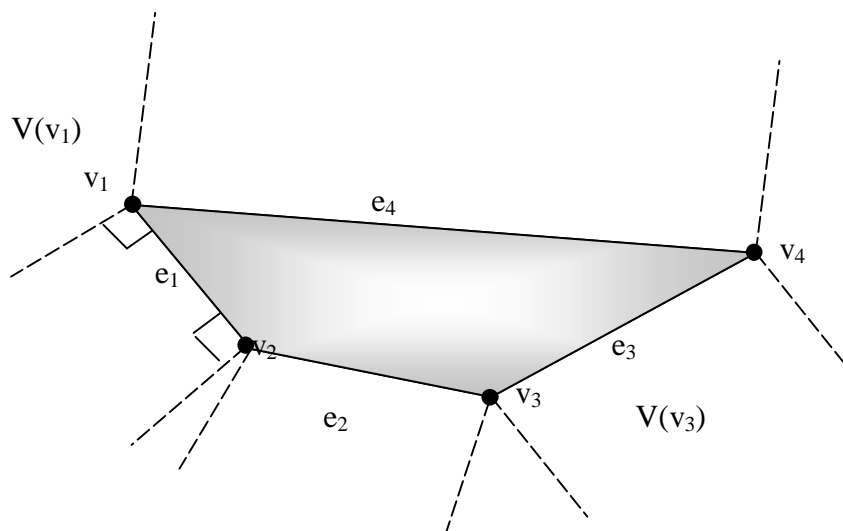
Rysunek 9. Znalezienie t_c z tolerancją ϵ

Algorytm ten można przyspieszyć wyznaczając prostą przechodzącą przez położenie punktu w chwili t_0 oraz $t_0 + \Delta t$, następnie wyznaczając punkt przecięcia tej prostej z płaszczyzną.

Warto zauważyć że w większości przypadków wielościany będą kolidowały z innymi wielościanami a nie tylko z płaszczyznami.

5.1. Algorytm Lin-Canny

Niezmiernie szybki algorytm działający na zasadzie wyszukiwania najbliższych elementów (ścian, krawędzi, wierzchołków) pomiędzy parą wielościanów wypukłych. najlepiej pokazać zasadę działania algorytmu w przestrzeni dwu wymiarowej. Algorytm ten bazuje na regionach Voronoi. Rozważmy wielokąt przedstawiony na rysunku 10, wielokąt ten ma osiem elementów: cztery wierzchołki oraz cztery krawędzie.



Rysunek 10. Wielokąt i jego regiony Voronoi

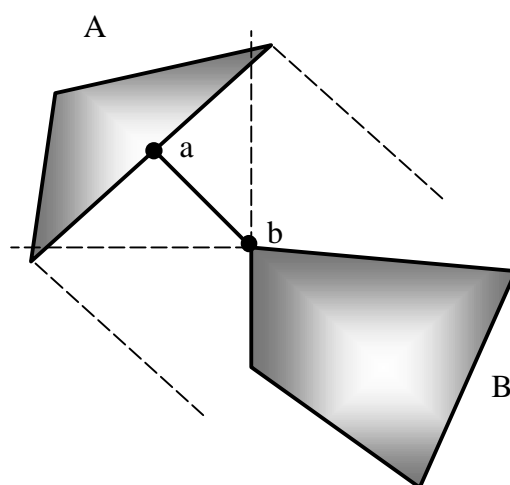
Dla każdego elementu F , zbiór punktów bliższych elementowi F niż jakimkolwiek innemu elementowi jest nazywany regionem Voronoi i oznaczany $V(F)$. Konstrukcja regionów dla wielokąta jest dość prosta. Z każdego wierzchołka prowadzimy promienie wychodzące na zewnątrz prostopadłe do krawędzi zawierającej dany wierzchołek. Promienie te tworzą brzegi regionów Voronoi. Region Voronoi jest to nieskończony stożek leżący pomiędzy dwoma promieniami wyprowadzonymi z tego samego wierzchołka. Region Voronoi dla krawędzi jest to pół nieskończony prostokąt leżący pomiędzy dwoma równoległymi promieniami wychodzącymi z wierzchołków wchodzących w skład krawędzi. Regiony Voronoi dzielą przestrzeń na zewnątrz wielokąta.

Twierdzenie 1. Niech będą dane dwa nieprzecinające się wielokąty A i B , niech a i b będą najbliższymi punktami pomiędzy elementem F_a wielokąta A , natomiast F_b wielokąta B . Jeżeli a i b są najbliższymi punktami pomiędzy A i B wtedy $a \in V(F_b)$

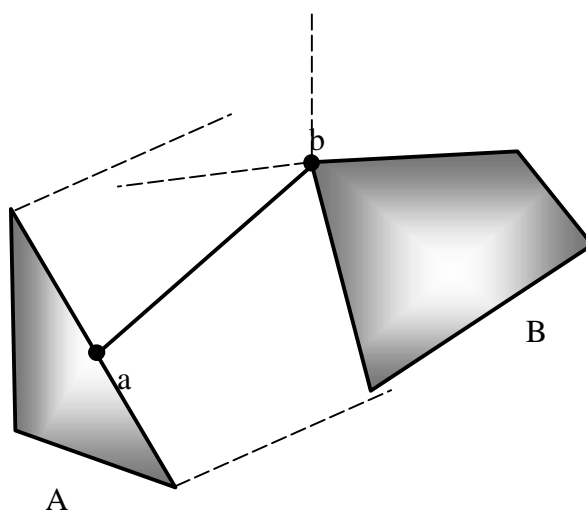
$i \in V(F_a)$ (dla uproszczenia pomijamy przypadki kiedy punkty leżą na brzegach regionów)

Dowód 1. Załóżmy, że $a \notin V(F_b)$. Wtedy a znajduje się w jakimś innym regionie Voronoi np. $V(F_c)$ i a jest bliższe F_c niż jakiejkolwiek innemu elementowi B . Ponieważ $b \in F_b$, czyli $b \notin F_c$, tak więc a i b nie mogą być najbliższymi punktami. identycznie rozumiemy kiedy $b \notin F_a$. \square

Twierdzenie 2. Dane są dwa wypukłe nie przecinające się wielokąty A i B , niech a i b będą najbliższymi punktami pomiędzy elementem F_a wielokąta A , natomiast F_b wielokąta B . Jeżeli $a \in V(F_b)$ oraz $b \in V(F_a)$, wtedy a oraz b są najbliższymi punktami pomiędzy A i B



Rysunek 11. Twierdzenie 2 mówi, że a i b są najbliższymi punktami pomiędzy A i B



Rysunek 12. a i b nie są najbliższymi punktami

Na rysunku 12 punkt b znajduje się w regionie Voronoi F_a , jednak a nie znajduje się już w regionie Voronoi F_b , a leży po złej stronie promienia wychodzącego z b