$*$ **PJWSTK: Egzamin poprawkowy z matematyki dyskretnej** 13.02.2002

Imię i nazwisko.. Numer indeksu............... Numer grupy ....

1. (4 pkt) Podaj przykład trzech zbiorów $A, B, C \in \{x, y, 1\}$ takich, że

   a) $(A \cup C) \cap B \neq (A \cap B) \cup C$

   b) $(A \setminus \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus C$

2. (4 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n > 0$ następująca formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(a_1 \rightarrow a_2) \vee (a_3 \rightarrow a_4) \vee \ldots \vee (a_{2n-1} \rightarrow a_{2n}) \vee (a_1 \cap a_3 \cap a_{2n-1})$$

3. (4 pkt) Zakładając, że $S(x)$ oznacza predykat „x jest smutny”, zaś $Z(x, y)$: „x jest zakochany w y” wyraź fakt, że

   a) Tylko w kimś smutni nie są w kimś zakochani

   b) Są ludzie którzy nie są smutni, mimo że nikt nie jst w nich zakochany

4. (4 pkt) Zaneguj następujące formuły wprowadzając znak negacji do wnętrz kwantyfikatorów tak, aby pozbyć się wszystkich znaków implikacji wyrażając je przez $\vee, \wedge, \neg$:

   a) $\exists x \in X : (P(x) \rightarrow \forall y \in Y : (Q(y) \rightarrow R(x)))$

   b) $\exists x \in X : (P(x) \vee (Q(y) \rightarrow \forall z \in Z : R(z)))$

   W ramach uzasadnienia podaj reguły z których należało skorzystać.

5. (4 pkt) Niech $X = \{a, b, c\}$, zaś Y jest zbiorem liczb całkowitych. Jaka jest moc

   a) zbioru wszystkich funkcji z X w Y?

   b) zbioru wszystkich funkcji z Y w X?

6. (4 pkt) Pokaż, że

   $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}$

7. (4 pkt) Podaj przykład relacji binarnej w zbiorze $\{a, b, c\}$, która jest

   a) przeciwzwrotna, nieprzechodnia i asymetryczna

   b) przechodnia, antysymetryczna i spójna

8. (4 pkt) Pokaż, że nie są relacjami równoważności następujące relacje określone w zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$

   a) $x\ r_1\ y \Leftrightarrow NWD(x, y) = min(x, y)$

   b) $x\ r_2\ y \Leftrightarrow xy \neq y^x$

9. (4 pkt) Na ile sposobów można włożyć 18 kul ponumerowanych od 1 do 18 do dwóch rozróżnialnych urn tak, aby

   a) w każdej urnie było po tyle samo kul,

   b) w obu urnach sumy numerów były nieparzyste.

10. (4 pkt.) Rzucamy wyważoną kostką. Jeśli wypadnie jedynka, to rzucamy drugi raz, jeśli mniej, to na tym poprzestajemy.

    a) Jaka jest oczekiwana wartość liczby wykonanych rzutów?

    b) Jaka jest wartość oczekiwana łącznej liczby wyrzuconych oczek?

Uwaga: Wszystkie odpowiedzi należy krótko uzasadnić, w miarę możliwości na tej kartce.