PJWSTK: Egzamin z matematyki dyskretnej 2002.02.04

Imię i nazwisko..... Numer indeksu..... Numer grupy .....

1. (4 pkt) Podaj przykład trzech zbiorów $A, B, C \subseteq \{a, b, c\}$ takich, że

   a) $(A \cup C) \cap B \neq (A \cup B) \cap C$

   b) $A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

2. (4 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n \geq 2$ następująca formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_3) \vee \ldots \vee (a_{n-1} \to a_n) \vee (a_n \to a_1)$$

3. (4 pkt) Zakładając, że $S(x)$ oznacza predykat „x jest szczęśliwy", zaś $Z(x)$: „x jest zakochany" wyraź w języku logiki fakt, że

   a) Wszyscy zakochani są szczęśliwi.

   b) Są ludzie szczęśliwi, choć nie są zakochani.

4. (4 pkt) Zaneguj następujące formuły wprowadzając znak negacji do wnętrz kwantyfikatorów tak, aby pozbyć się znaków implikacji wyrażając je przez $\vee, \wedge, \neg$:

   a) $\forall x \in A : P(x) \to (Q(y) \to R(x))$

   b) $\exists x \in A : \forall y \in B \setminus A : (P(x) \vee Q(y)) \to R(x)$

   W ramach uzasadnienia podaj reguły z których należało skorzystać.

5. (4 pkt) Niech X będzie zbiorem wszystkich otwartych odcinków osi rzeczywistej o końcach wymiernych. Jaka jest moc

a) zbioru wszystkich tych podzbiorów X, w których każde dwa różne elementy są rozłączne?

b) X?

6. (4 pkt) Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$.

7. (4 pkt) Podaj przykład relacji określonej w zbiorze $\{1, 2, 3\}$, która jest

   a) zwrotna, nieprzechodnia i antysymetryczna

   b) przechodnia, symetryczna i nie jest zwrotna

8. (4 pkt) Pokaż, że nie są relacjami równoważności następujące relacje określone na $\mathbb{N}$

   a) $x \; r_1 \; y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$

   b) $x \; r_2 \; y \Leftrightarrow x \neq y + 1$

9. (4 pkt) Na ile sposobów można włożyć 9 kul ponumerowanych od 1 do 9 do dwóch urn tak, aby

   a) w każdej urnie było co najwyżej pięć kul,

   b) w pierwszej urnie suma numerów była mniejsza od sumy numerów w drugiej urnie.

10. (4 pkt.) Rzucamy dwa razy wyważoną kostką.

    a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucona suma oczek jest podzielna przez 5?

    b) Jekie jest prawdopodobieństwo tego, że na drugiej kostce wypadnie co najmniej czwórka pod warunkiem, że na pierwszej wypadła liczba podzielna przez 3?

Uwaga: Wszystkie odpowiedzi należy krótko uzasadnić, w miarę możliwości na tej kartce.