PJWSTK: Egzamin z matematyki dyskretnej 1.02.1999

Mniej więcej można się spodziewać zadań sformułowanych tak, jak na tym egzaminie sprzed 2 lat.

1. (5 pkt.) Czy dopełnienie różnicy symetrycznej dwóch zbiorów jest zawsze równe różnicy symetrycznej ich dopełnień?

2. (5 pkt.) Rozważmy zbiór $\mathcal{M}$ macierzy kwadratowych $n \times n$ o elementach rzeczywistych. Określmy następującą relację na $\mathcal{M}$:

$$(A, B) \in r \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{M} : (det(C) \neq 0 \quad \wedge \quad B = C^{-1}AC)$$

   Pokaż, że r jest relacją równoważności.

3. (4 pkt.) Zakładając, że $p(x)$ oznacza predykat „x jest liczbą pierwszą", a a $e(x)$: „x jest liczbą parzystą", wyraź w języku logiki następujące stwierdzenia:

   a. Każdą liczbę parzystą ≥ 4 można przedstawić, jako sumę dwóch liczb pierwszych.

   b. Każda liczba naturalna większa od 2 dzieli się bez reszty przez pewną liczbę pierwszą.

4. (6 pkt.) Podaj przykład zbioru i relacji na nim określonej (po jednym przykładzie do każdego z podpunktów), która jest

   a. asymetryczna, a jednocześnie jest symetryczna.

   b. symetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna.

   c. niepusta i spójna, a jednocześnie jest relacją częściowego porządku.

5. (15 pkt.) Ze zbioru dwóch kul białych i dwóch czarnych losujemy dwie. Przy założeniu, że wybór każdej z czterech kul był jednakowo prawdopodobny, określ model probablilistyczny oraz oblicz prawdopodobieństwo tego, że

   a. wylosowane kule są różnego koloru

   b. druga z wylosowanych kul jest czarna

   c. druga z wylosowanych kul jest czarna, pod warunkiem, że pierwsza jest czarna.

   d. druga z wylosowanych kul jest czarna pod warunkiem, że pierwsza jest biała.

   e. z wylosowanych kul wylosujemy w kolejnym losowaniu kulę czarną pod warunkiem, że nie wylosowaliśmy za pierwszym razem dwóch kul białych.

6. (nadobowiązkowe) Rozważmy zbiór $\mathbb{N}$. Określmy relacje równoważności ρ i σ na $\mathbb{N}$:

$$x\rho y \Leftrightarrow 12|(x-y), x\sigma y \Leftrightarrow 15|(x-y),$$

   a. Czy relacja $\rho \cap \sigma$ jest relacją równoważności?

   b. Czy relacja $\rho\sigma$ jest relacją równoważności?

   c. Czy relacja $\rho \cup \sigma$ jest relacją równoważności?

   d. Ile elementów ma zbiór $\mathbb{N}/_{(\rho\cap\sigma)}$?