**PJWSTK: Egzamin z matematyki dyskretnej** 4.02.2002

Imię i nazwisko..... Numer indeksu..... Numer grupy .....

1. (4 pkt) Podaj przykład trzech zbiorów $A, B, C \subseteq \{a, b, c\}$ takich, że

   **a)** $(A \cap C) \cup B \neq (A \cap B) \cup C$

   **b)** $A \cap (B \setminus C) \neq (A \cap B) \setminus C$

2. (4 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n \geq 2$ następująca formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_3) \vee \ldots \vee (a_{n-1} \to a_n) \vee (a_n \to a_1)$$

3. (4 pkt) Zakładając, że $S(x)$ oznacza predykat „$x$ jest szczęśliwy", zaś $Z(x)$: „$x$ jest zakochany" wyraź w języku logiki fakt, że

   **a)** Nie każdy, kto jest szczęśliwy jest zakochany.

   **b)** Są ludzie zakochani, choć nie są szczęśliwi.

4. (4 pkt) Zaneguj następujące formuły wprowadzając znak negacji do wnętrz kwantyfikatorów tak, aby pozbyć się znaków implikacji wyrażając je przez $\vee, \wedge, \neg$:

   **a)** $\forall x \in A : (P(x) \to Q(y)) \to R(x)$

   **b)** $\exists x \in A : \forall y \in B \setminus A : (P(x) \wedge Q(y)) \to R(x)$

   W ramach uzasadnienia podaj reguły z których należało skorzystać.

5. (4 pkt) Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich odcinków osi rzeczywistej o końcach całkowitych. Jaka jest moc

**a)** zbioru wszystkich tych podzbiorów $X$, których elementy są rozłączne parami?

**b)** $X$?

6. (4 pkt) Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$.

7. (4 pkt) Podaj przykład relacji określonej w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, która jest

   **a)** zwrotna, nieprzechodnia i antysymetryczna

   **b)** przechodnia, symetryczna i nie jest zwrotna

8. (4 pkt) Pokaż, że nie są relacjami równoważności następujące relacje określone na $\mathbb{N}$

   **a)** $x \; r_1 \; y \Leftrightarrow |x - y| \leq 3$

   **b)** $x \; r_2 \; y \Leftrightarrow y \neq x + 1$

9. (4 pkt) Na ile sposobów można włożyć 9 kul ponumerowanych od 1 do 9 do dwóch urn tak, aby

   **a)** w każdej urnie były co najmniej cztery kule,

   **b)** w pierwszej urnie suma numerów była większa od sumy numerów w drugiej urnie.

10. (4 pkt.) Rzucamy dwa razy wyważoną kostką.

    **a)** Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucona suma oczek jest podzielna przez 4?

    **b)** Jekie jest prawdopodobieństwo tego, że na drugiej kostce wypadnie co najmniej czwórka pod warunkiem, że na pierwszej wypadła liczba złożona?

*Uwaga: Wszystkie odpowiedzi należy krótko uzasadnić, w miarę możliwości na tej kartce.*