ĆWICZENIA IV i V

(funkcje)

Zadania

1. Która z podanych relacji jest funkcją? Dla każdej funkcji wyznacz jej dziedzinę i przeciwdziedzinę.

   (a) $r = \{(1,2),(2,2),(2,4),(4,4),(4,8),(8,4)\}$,

   (b) $r = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,8),(8,5)\}$,

   (c) $r = \{(x,y) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2x + y = \max\{x,2\}\}$,

   (d) $r = \{(x,y) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| = 2^x\}$.

2. Sprawdź, czy funkcja $f : X \to X$ jest suriekcją, iniekcją, bijekcją. Wyznacz obraz i przeciwobraz zbioru $A \subset X$

   (a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$, $A = [-1, 1]$,

   (b) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $A = [0, 2)$,

   (c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1 + |x|)$, $A = \{-9, 0, 10\}$,

   (d) $X = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x \cos^2 x$, $A = [\pi, 2\pi]$.

3. Niech f będzie relacją zdefiniowaną w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, określoną wzorem: x f y wttw, gdy $\lg y = 3x + 1$. Zbadaj, czy f jest funkcją. Jeśli tak, sprawdź czy jest to bijekcja i wyznacz $f^{-1}(A)$ dla $A = [16, 32]$. Wyznacz $(f \circ f)(B)$ dla $B = \{1, 2, 4\}$.

4. Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f(x) = \min\{x, (-1)^x\}$. Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji. Sprawdź, czy jest ona iniekcją i czy jest suriekcją. Wyznacz obraz zbioru $A = \{-3, -1, 1, 3\}$ względem funkcji f.

5. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ dla $x \neq 1$ oraz $f(1) = 2$. Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji. Sprawdź, czy jest ona bijekcją. Jeśli tak wyznacz obraz zbioru $A = (-\infty, 2)$ względem funkcji f^{-1}.

6. Dana jest funkcja $f : \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \to \wp(\mathbb{R})$ taka, że $f(A, B) = A \cup B$. Sprawdź, czy jest to funkcja różnowartościowa. Wyznacz obraz zbioru $\wp(\{1\}) \times \wp(\{1, 2\})$ względem funkcji f.

7. Dane jest odwzorowanie f. Sprawdź, czy jest ono bijekcją. Jeśli tak wyznacz funkcję odwrotną.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (x \mod 4)$,

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = |x| - x$,

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$,

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$,

   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, y)$.

8. Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \max\{3, x\} - x$. Wyznacz:

   (a) $f \circ g$,

   (b) $g \circ h$,

   (c) $(f \circ g) \circ h$,

   (d) $f \circ (g \circ h)$.

9. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji f i dowolnych zbiorów A, B.

   (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

(b) Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

10. Udowodnij, że złożeniem funkcji różnowartościowych jest funkcja różnowartościowa.

11. Niech f będzie funkcją ze zbioru X w zbiór Y. Zbadaj czy dla dowolnych $A, B \subseteq X$ i $C \subseteq Y$ zachodzi podana równość. Podaj przykład ilustrujący rozważaną równość lub kontrprzykład wskazujący, że równość nie zachodzi.

    (a) $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$,

    (b) $f(A \cap f^{-1}(C)) = C \cap f(A)$.

12. Uzasadnij, że:

    (a) $5n^3 + 100n = O(n^5)$,

    (b) $4n^6 + n^3 + 21n^2 + n + 100 = \Theta(n^6)$.

13. Uporządkuj niemalejąco poniższy ciąg funkcji wg ich rzędów:

    (a) $f_1(n) = 100n^5+7$, $f_2(n) = \frac{3n^4+4n}{7n^3+1}$, $f_3(n) = \lg n^n$, $f_4(n) = (n+1)!$, $f_5(n) = n^n$, $f_6(n) = 10^{3n+1}$,

    (b) $f_1(n) = 3n^2 + 7n + 5$, $f_2(n) = \lg n^2$, $f_3(n) = |\sin(n!)|$, $f_4(n) = (\sqrt{n})^n$, $f_5(n) = n!$.

14. Które równości są prawdziwe. Odpowiedź uzasadnij.

    (a) $2^{n+1} = O(2^n)$,

    (b) $(n+1)^2 = O(n^2)$,

    (c) $2^{2n} = O(2^n)$,

    (d) $\log^{73} n = O(\sqrt{n})$,

    (e) $40^n = O(n!)$,

    (f) $40^n = O(2^n)$,

    (g) $(2n)! = O(n!)$,

    (h) $\lg n^n = O(\lg n)$.

15. Określ, które z podanych ograniczeń funkcji $f(n)$ są poprawne:

    (a) $f(n) = \Theta((n^5 - 5n + 1)^8)$, $f(n) = O(\sqrt{n} \log n)$, $f(n) = \Omega(n!)$, gdzie $f(n) = (2n+1)^{40}$,

    (b) $f(n) = \Theta(n \lg n)$, $f(n) = O(n^{\lg 4})$, $f(n) = \Omega(n\sqrt{n})$, gdzie $f(n) = \lg n^{\sqrt{n}}$.