ĆWICZENIA III

(rachunek predykatów)

Zadania

1. Podaj, jeśli jest to możliwe, wartości logiczne poniższych wyrażeń.
   - **(a)** $\forall x(\sqrt{x^2} = x)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{Z}$
   - **(b)** $\forall m \exists n(2m = n)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$
   - **(c)** $\exists(x \in \mathbb{N})(x + y = 5)$
   - **(d)** $\forall n \exists k(2^n = k)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$
   - **(e)** $\forall n \exists k((n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}) \rightarrow (n = 2^k))$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$
   - **(f)** $\forall x \exists y((x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}) \rightarrow (x > y))$
   - **(g)** $\exists y \forall x(x < y)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$
   - **(h)** $\exists(r \in \mathbb{R})\forall(n \in \mathbb{N})(r < n)$
   - **(i)** $\exists(k \in \mathbb{Z})\exists(s \in \mathbb{R})((k + 2s = -1) \wedge (2k - s = -14))$
2. Zapisz następujące zdania za pomocą symboliki logicznej.
   - **(a)** Jeśli długość słowa w jest równa 2, to $w \in \Sigma$.
   - **(b)** Nie istnieje liczba, której kwadrat był by mniejszy od 0.
   - **(c)** Istnieje liczba naturalna n, taka że $kn = k$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
   - **(d)** Jeśli suma dwóch liczb pierwszych jest parzysta, to żadna z tych liczb nie jest równa 2.
   - **(e)** Liczby całkowite x i y mają takie same dzielniki.
   - **(f)** x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z.
3. Określ, które zmienne w następujących wyrażeniach są wolne, a które związane.
   - **(a)** $\forall x \exists y((xy = xz) \rightarrow (y = z))$
   - **(b)** $\forall x(x < 0 \rightarrow (xy > 0 \vee (\exists z(x + z = y))))$
   - **(c)** $\forall x(x \in \mathbb{R} \rightarrow (x = 2^y)) \wedge (xy > 0 \vee \forall z(z \in \mathbb{R} \rightarrow (xyz < 0)))$
4. Sprawdź, czy zdanie $\forall x \exists y((x^2 + 1)y = 1)$ jest prawdziwe jeśli dziedziną jest zbiór: (a) $\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Q}$, (c) $\mathbb{R}$.
5. Napisz zaprzeczenie wyrażenia $\forall x \forall y((x^2 = y) \rightarrow \exists z(x \leq z \leq y))$ nie używając spójnika negacji.
6. Udowodnić, że poniższe wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.
   - **(a)** $\neg \exists x(p(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg p(x))$ - prawo de Morgana
   - **(b)** $\exists x \forall y(p(x, y)) \rightarrow \forall y \exists x(p(x, y))$
   - **(c)** $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \exists x(p(x)) \wedge \exists x(q(x))$
7. Sprawdź, czy poniższe wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.
   - **(a)** $\exists x(p(x)) \wedge \exists x(q(x)) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$
   - **(b)** $\exists x \exists y(p(x, y)) \rightarrow \exists x(p(x, x))$
   - **(c)** $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow (\forall x(p(x)) \rightarrow \forall x(q(x)))$