ĆWICZENIA XIV

(moce zbiorów)

Zadania

1. Czy zbiory $X = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x < 10\}$ i $Y = \{x^2 : x \in \mathbb{N}$ i x jest liczbą parzystą $< 20\}$ są równoliczne?

2. Dowieść, że następujące zbiory są równoliczne.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x^2 < 70\}$,

   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$ i $B = \emptyset$.

3. Dowieść, że następujące zbiory są przeliczalne. Podać, które z nich mają moc $\aleph_0$.

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$,

   (b) $\{x \in \mathbb{N} : \exists y\ (y \in \mathbb{R} \rightarrow (x = \sin(y)))\}$.

4. Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc $\mathbf{c}$.

   (a) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 4\}$,

   (b) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 4\}$.

5. Udowodnić, że zbiór słów nad alfabetem skończonym jest zbiorem przeliczalnym.

6. Udowodnić, że zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest nieprzeliczalny.

7. Udowodnić, że zbiór wszystkich odcinków położonych na osi liczb rzeczywistych, o końcach w punktach wymiernych, jest mocy $\aleph_0$.

8. Udowodnić, że jeśli A jest zbiorem mocy $\aleph_0$, a B zbiorem mocy $\mathbf{c}$, to produkt $A \times B$ ma moc $\mathbf{c}$.

9. Weźmy graf $G = (V, E)$. Niech P - zbiór wszystkich dróg w tym grafie. Udowodnij, że jeśli E jest zbiorem skończonym, to P jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

10. Niech A i B będą zbiorami skończonymi takimi, że $|A| < |B|$. Czy następujące zdania są prawdziwe czy fałszywe?

    (a) Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru A w zbiór B.

    (b) Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru A na zbiór B.

    (a) Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru B w zbiór A.