

TEST 2 PRZYKŁADOWY

Imię i nazwisko:

Numer indeksu:

Numer grupy:

Test jest testem wielokrotnego wyboru (tzn. wszystkie kombinacje odpowiedzi są możliwe). Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane wttw, gdy wszystkie podpunkty w pytaniu mają zaznaczone właściwe odpowiedzi. Odpowiedzi “+” oraz “-” proszę zaznaczać przy każdym podpunkcie pytania w stosownym miejscu - wewnątrz nawiasu kwadratowego poprzedzającego treść []. Życzę powodzenia.

1. Niech U będzie niepustym uniwersum. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

- (a) dowolna relacja $r \subseteq U^2$ jest funkcją
- (b) dowolna funkcja $f \subseteq U^2$ jest relacją
- (c) relacja $r = \{(i, j) \in U^2 : i = j\}$ jest funkcją

2. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:

- (a) $f(x) = |x| + \frac{\pi}{2}$, to funkcja f nie jest suriekcją, ale jest iniekcją
- (b) $f(x) = \sin(x) - \frac{\pi}{2}$, to funkcja f jest suriekcją, ale nie jest iniekcją
- (c) $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, to funkcja f jest bijekcją

3. Niech $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, będzie funkcją oraz $A \subseteq \mathbb{Z}$ pewnym zbiorem, wtedy:

- (a) jeżeli $f(x) = 2x + 1$ i $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, to $f(A) = \{-3, -1, 1, 3\}$
- (b) jeżeli $f(x) = |x|$ i $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to $f(A) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (c) jeżeli $f(x) = \max(x, 0)$ i $A = \mathbb{N}$, to $f(A) \neq \mathbb{Z}$

4. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją postaci $f(n) = \sqrt{n}^3 \lg n! + n^2$. Które z podanych poniżej ograniczeń funkcji jest poprawne:

- (a) $f(n) = \Theta(n^2)$
- (b) $f(n) = \Omega\left(n^{\frac{5}{2}}\right)$
- (c) $f(n) = O\left(n^{\sqrt{n}}\right)$

5. Niech $f(n) = n^3 + n \lg n + \sqrt{n}$ oraz $g(n) = 2^{2 \lg n} + n^2$, wtedy:

- (a) $f(n) + g(n) = \Omega(n)$
- (b) $f(n) + g(n) = O(n^2)$
- (c) $f(n) \cdot g(n) = \Theta(n^4)$

6. Jeżeli pewna własność $W(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest prawdziwa dla $n = 1$ i jeżeli $W(n)$ jest prawdą, to $W(n+1)$ także jest prawdą, dla dowolnego $n \geq 1$, to:

- (a) własność $W(2^{100})$ jest prawdziwa
- (b) własność $W(0)$ jest prawdziwa
- (c) jeżeli własność $W(0)$ jest fałszywa, to własność $W(1)$ jest fałszywa

7. Która z poniższych formuł jest niezmiennikiem pętli while w następującym programie:

```
int Cos (int a, int n) { // a>1, n>(-1)
  int i:=0, s:=1;
  while (i<n)
    s:=s*a;
    i:=i+1;
  od
  return s;
}
```

(a) $i \in \mathbb{N} \wedge s \in \mathbb{N}$

(b) $s \cdot a = \prod_{j=0}^i a,$

(c) $s \geq a \cdot i$

8. Funkcję $f(n) = 2^{n-1}$, dla $n > 0$, można zdefiniować następującym równaniem rekurencyjnym:

(a) $f(0) = 1, f(1) = 1, f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ dla $n > 1$

(b) $f(0) = 1, f(1) = 1, f(n) = 2f(n-1)$ dla $n > 1$

(c) $f(0) = 1, f(n) = 2f(n-1)$, dla $n > 0$

9. W urnie znajduje się 15 kul białych, 20 kul szarych oraz 25 kul czarnych. Wyjmujemy pojedynczo z urny 14 kul i ustawiamy je jedna za drugą. Ile różnych (w sensie kolorów kul) ustawień możemy uzyskać:

(a) $3^{14} \cdot 14 \cdot \binom{14}{3}$

(b) $14!$

(c) 3^{14}

10. Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Wiemy, że w pierwszym rzucie otrzymamy reszkę. Ile jest możliwych wyników rzutów, w których reszka wypadła parzystą liczbę razy:

(a) $\binom{11}{1} + \binom{11}{3} + \binom{11}{5} + \dots + \binom{11}{11}$

(b) $14! \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$

(c) $\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \dots + \binom{12}{12}$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie nr 1 (5 pkt) Udowodnij indukcyjnie, że dla każdego $n > 0$, $F(4n)$ jest podzielne przez 3, gdzie $F(n)$ jest n -tą liczbą Fibonacciego.

Zadanie nr 2 (5 pkt) Stosując metodę wielomianu charakterystycznego znajdź postać jawną n -tego wyrazu ciągu rekurencyjnego $G(n)$, gdzie

$$G(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ G(n-1) + G(n-2) + 1 & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$