# Funkcje

1. Która z podanych relacji jest funkcją? Dla każdej funkcji wyznacz jej dziedzinę i przeciwdziedzinę.
   **(a)** $r = \{(1,2),(2,2),(2,4),(4,4),(4,8),(8,4)\}$,
   **(b)** $r = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,8),(8,5)\}$,
   **(c)** $r = \{(x,y) \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 2x+y = \max(\{x,2\}\})$,
   **(d)** $r = \{(x,y) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |y| = 2^x\}$,
   **(e)** $r = \{(f,g) \subset F \times F : f = O(g)\}$, gdzie $F$ jest zbiorem funkcji określonych w dziedzinie liczb naturalnych.

2. Niech $P$ będzie zbiorem programów z jednym argumentem wywołania będącym liczbą całkowitą. W zbiorze $P$ określamy relację $r$ taką, że $P_1 \ r \ P_2$ wttw dla każdego $a \in \mathbb{Z}$, $Res(P_1(a)) = Res(P_2(a))$, gdzie $Res(P(a))$ jest zbiorem możliwych wyników programu $P$ dla danej wejściowej $a$. Czy relacja $r$ jest funkcją?

3. Niech $P$ będzie programem z jednym argumentem wywołania będącym liczbą całkowitą. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy relację $r$ taką, że $a \ r \ b$ wttw $Res(P(a)) = Res(P(b))$, gdzie $Res(P(a))$ jest zbiorem możliwych wyników programu $P$ dla danej wejściowej $a$. Czy relacja $r$ jest funkcją? Jeśli tak określ jej własności (czy jest iniekcją, suriekcją, bijekcją).
   **(a)** $P(n) = \{x := 100;\ \ for\ \ i = 1\ \ to\ \ n\ \ do\ \ x := \lfloor x/3 \rfloor;\ \ i := i+1;\ \ od\ \ return\ \ x\}$,
   **(b)** $P(n) = \{x := 100;\ \ for\ \ i = 1\ \ to\ \ n\ \ do\ \ k := random(\{2,3,4\});\ \ x := \lfloor x/k \rfloor;\ \ i := i+1;\ \ od\ \ return\ \ x\}$.

4. Niech $A$ będzie następującym podzbiorem zbioru liczb całkowitych $A = \{-10,-9,\ldots,9,10\}$ oraz niech $P$ będzie programem takim, że dla każdego $n \in A$

   $P(n) = \{X := \emptyset;\ \ for\ \ i = -10\ \ to\ \ 10\ \ do\ \ if\ \ sgn(n) = sgn(i)\ \ then\ \ X := X \cup \{i\};\ \ fi\ \ i := i+1;\ \ od$

   $return\ \ X\}$.

   Co oblicza program $P$? Wyznacz $P(3)$. Określmy teraz funkcję $f : A \to P(A)$ taką, że $f(n) = P(n)$. Czy $f$ jest suriekcją, iniekcją, bijekcją?

5. Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem zapisanym w tablicy $T$ (tzn. $T[i]$ oznacza $i$-ty element zbioru $A$), a $r$ relacją równoważności określoną w tym zbiorze. Ponadto niech $P$ będzie programem takim, że dla każdego $n \in A$

   $P(n) = \{X := \emptyset;\ \ for\ \ i = T[1]\ \ to\ \ T[|A|]\ \ do\ \ if\ \ (n,i) \in r\ \ then\ \ X := X \cup \{i\};\ \ fi\ \ i := i+1\ \ od$

   $return\ \ X\}$.

   Co oblicza program $P$? Czy funkcja $f : A \to P(A)$ taka, że $f(n) = P(n)$ jest suriekcją, iniekcją, bijekcją?

6. Niech zbiór $U$ będzie pewnym uniwersum, a zbiór $A$ jego podzbiorem. Ponadto niech $P_A$ będzie programem z jednym argumentem wywołania takim, że dla $a \in U$

   $$P_A(a) = \{if\ \ a \in A\ \ then\ \ x := 1\ \ else\ \ x := 0\ \ fi\ \ return\ \ x\}.$$

   Co oblicza program $P$? Czy funkcja $f : U \to \{0,1\}$ taka, że $f(a) = P(a)$ jest suriekcją, iniekcją, bijekcją?

7. Sprawdź, czy funkcja $f : X \to X$ jest suriekcją, iniekcją, bijekcją. Wyznacz obraz i przeciwobraz zbioru $A \subset X$
   **(a)** $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $A = [0,2)$,
   **(b)** $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+|x|)$, $A = \{-9,0,10\}$.

8. Niech $f$ będzie relacją zdefiniowaną w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, określoną wzorem: $x \ f \ y$ wttw, gdy $\lg y = 3x + 1$. Zbadaj, czy $f$ jest funkcją. Jeśli tak, sprawdź czy jest to bijekcja i wyznacz $f^{-1}(A)$ dla $A = [16, 32]$. Wyznacz $(f \circ f)(B)$ dla $B = \{1, 2, 4\}$.

9. Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że $f(x) = \min(\{x, (-1)^x\})$. Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji. Sprawdź, czy jest ona iniekcją i czy jest suriekcją. Wyznacz obraz zbioru $A = \{-3, -1, 1, 3\}$ względem funkcji $f$.

10. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ dla $x \neq 1$ oraz $f(1) = 2$. Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji. Sprawdź, czy jest ona bijekcją. Jeśli tak wyznacz obraz zbioru $A = (-\infty, 2)$ względem funkcji $f^{-1}$.

11. Dana jest funkcja $f : P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ taka, że $f(A, B) = A \cup B$. Sprawdź, czy jest to funkcja różnowartościowa. Wyznacz obraz zbioru $P(\{1\}) \times P(\{1, 2\})$ względem funkcji $f$.

12. Dane jest odwzorowanie $f$. Sprawdź, czy jest ono bijekcją. Jeśli tak wyznacz funkcję odwrotną.

    **(a)** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x \mod 4$,
    **(b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = |x| - x$,
    **(c)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$,
    **(d)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$,
    **(e)** $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x$,
    **(f)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$,
    **(g)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, y)$.

13. Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \max(\{3, x\} - x)$. Wyznacz:

    **(a)** $f \circ g$,
    **(b)** $g \circ h$,
    **(c)** $(f \circ g) \circ h$,
    **(d)** $f \circ (g \circ h)$.

14. Rozważmy funkcję $f : X \to Y$ zadaną w postaci następującego programu:

    **(a)** *f(x)={if x mod 2 = 0 then return x; else return -x; fi}*,
    **(b)** *f(x)={i:=1; s:=1; while i<x do i:=i+2; s:=s+i; od return s}*,
    **(c)** *f(x)={i:=0; s:=0; while i<x do i:=i+1; s:=s+1/i; od return s}*.

    Kolejno:

    - ustal wartościowanie zbiorów $X, Y \subseteq \mathbb{Z}$ takie, że funkcja $f$ jest bijekcją i $X$ jest zbiorem nieskończonym,
    - wyznacz analitycznie funkcję odwrotną $f^{-1}$ do funkcji $f$ i zapisz ją w postaci odpowiedniego programu,
    - podaj obraz i przeciwobraz zbioru $A = \{2, 3, 5, 7\}$ względem funkcji $f$ oraz $f^{-1}$.

15. Niech $n \in \mathbb{N}_+$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ będzie funkcją opisaną następującym programem, gdzie odpowiednio $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest $n$-tką liczb naturalnych, której liczbę $n$ składowych oznaczymy przez $|A|$ oraz $A[i] = a_i$ jest $i$-tym elementem owej $n$-tki:

    $$f(A) = \{i := 1;\ tmp := A[1];\ \textit{while}\ \ i < |A|\ \ \textit{do}\ \ \textit{if}\ \ tmp < A[i+1]\ \ \textit{then}\ \ tmp = A[i+1];\ \ \textit{fi}$$

    $$i := i + 1;\ \ \textit{od}\ \ \textit{return}\ \ (A, tmp)\}.$$

    Kolejno:

    **(a)** wyznacz rezultat funkcji $f((5, 2, 3, 7, 1))$,
    **(b)** ustal, czy funkcja $f$ jest bijekcją,

**(c)** podaj przykład funkcji $g : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ zapisanej w postaci programu, takiej, że jeżeli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, to $(f \circ g)(A) = -1$, w przeciwnym przypadku $(f \circ g)(A)$ =wartość drugiej co do wielkości składowej $n$-tki $A$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}_+$ i $f : \mathbb{N}^n \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}^n \times \{1, 2, \ldots, n\}$ będzie funkcją opisaną następującym programem, gdzie odpowiednio $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest $n$-tką liczb naturalnych oraz $A[i] = a_i$ jest $i$-tym elementem owej $n$-tki:

$f(A, n) = \{tmp := 0;\ \ if\ \ n > 1\ \ then\ \ if\ \ A[n-1] > A[n]\ \ then\ \ tmp := A[n-1];\ \ A[n-1] := A[n];$

$A[n] := tmp;\ \ fi\ \ (A, n) := f(A, n-1);\ \ fi\ \ return\ \ (A, n)\}.$

Kolejno:

**(a)** wyznacz rezultat funkcji $f((5, 4, 3, 2, 1), k)$, gdzie $k = 1, 3, 5$,

**(b)** ustal, czy funkcja $f$ jest bijekcją,

**(c)** podaj interpretację $n$-krotnego złożenia funkcji $f \circ f \circ \ldots \circ f$, dla ustalonego $n$. Czy interpretacja ta jest inna niż $(n-1)$-krotnego złożenia rozważanej funkcji?

17. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f$ i dowolnych zbiorów $A, B$.

**(a)** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

**(b)** Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

18. Udowodnij, że złożeniem funkcji różnowartościowych jest funkcja różnowartościowa.

19. Niech $f$ będzie funkcją ze zbioru $X$ w zbiór $Y$. Zbadaj czy dla dowolnych $A, B \subseteq X$ i $C \subseteq Y$ zachodzi podana równość. Podaj przykład ilustrujący rozważaną równość lub kontrprzykład wskazujący, że równość nie zachodzi.

**(a)** $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$,

**(b)** $f(A \cap f^{-1}(C)) = C \cap f(A)$.

20. Uzasadnij, że:

**(a)** $5n^3 + 100n = O(n^5)$,

**(b)** $4n^6 + n^3 + 21n^2 + n + 100 = \Theta(n^6)$.

21. Uporządkuj niemalejąco poniższy ciąg funkcji wg ich rzędów:

**(a)** $f_1(n) = 3n^2 + 7n + 5$, $f_2(n) = \lg n^2$, $f_3(n) = n!$,

**(b)** $f_1(n) = 100n^5 + 7$, $f_2(n) = \frac{3n^4+4n}{7n^3+1}$, $f_3(n) = \lg n^n$, $f_4(n) = (n+1)!$, $f_5(n) = n^n$, $f_6(n) = 10^{3n+1}$.

22. Które ograniczenia są prawdziwe. Odpowiedź uzasadnij.

**(a)** $2^{n+1} = O(2^n)$,

**(b)** $(n+1)^2 = O(n^2)$,

**(c)** $2^{2n} = O(2^n)$,

**(d)** $\log^{73} n = O(\sqrt{n})$,

**(e)** $40^n = O(n!)$,

**(f)** $40^n = O(2^n)$,

**(g)** $(2n)! = O(n!)$,

**(h)** $\lg n^n = O(\lg n)$.

23. Określ, które z podanych ograniczeń funkcji $f(n)$ są poprawne:

**(a)** $f(n) = \Theta((n^5 - 5n + 1)^8)$, $f(n) = O(\sqrt{n} \log n)$, $f(n) = \Omega(n!)$, gdzie $f(n) = (2n+1)^{40}$,

**(b)** $f(n) = \Theta(n \lg n)$, $f(n) = O(n^{\lg 4})$, $f(n) = \Omega(n\sqrt{n})$, gdzie $f(n) = \lg n^{\sqrt{n}}$.

24. Niech $T(Alg, n)$ będzie funkcją liczby operacji dominujących pewnego algorytmu $Alg$, dla danych rozmiaru $n$. Rozważmy program $P(n)$ postaci:

**(a)** $P(n) = \{for\ \ i := 1\ \ to\ \ n\ \ do\ \ Q(n)\ \ od\ \ R(n)\}$,

**(b)** $P(n) = \{for\ \ i := 1\ \ to\ \ n\ \ do\ \ for\ \ j := 1\ \ to\ \ n\ \ do\ \ Q(n)\ \ od\ \ R(n)\ \ od\}$,

**(c)** $P(n) = \{for\ \ i := 1\ \ to\ \ \lfloor lgn^n \rfloor\ \ do\ \ for\ \ j := 1\ \ to\ \ \lfloor lgn \rfloor\ \ do\ \ Q(n);\ \ R(n)\ \ od\ \ od\}$.

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

- jeżeli $T(Q, n) = O\left(n^2\right)$ i $T(R, n) = \Theta(n)$, to $T(P, n) = O\left(n^2 lgn\right)$,
- jeżeli $T(Q, n) = \Omega\left(n^2\right)$ i $T(R, n) = O\left(n^3\right)$, to $T(P, n) = \Omega\left(2^{lgn}\right)$,
- jeżeli $T(Q, n) = \Theta\left(\sqrt{n}\right)$ i $T(R, n) = \Omega(nlgn)$, to $T(P, n) = \Theta(n!)$.