Rekursja II

1. Stosując równanie charakterystyczne wyznacz postać jawną ciągu:

   (a) $s(0) = 2$, $s(1) = -1$ oraz $s(n) = -s(n-1) + 6s(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

   (b) $s(0) = 2$ oraz $s(n) = 5s(n-1)$ dla $n \geqslant 1$

   (c) $s(0) = 1$, $s(1) = 8$ oraz $s(n) = 4s(n-1) - 4s(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

2. Stosując równanie charakterystyczne wyznacz postać jawną ciągu:

   (a) $a(0) = 1$, $a(1) = 5$, $a(2) = 17$ $a(n+3) = 7a(n+2) - 16a(n+1) + 12a(n)$,

   (b) $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(2) = 4$ $a(n+3) = a(n+2) + a(n+1) + 2a(n)$,

   (c) $a(0) = 1$, $a(1) = 3$, $a(2) = 9$ $a(n+3) = 5a(n+2) - 8a(n+1) + 4a(n)$,

   (d) $a(0) = 1$, $a(1) = 5$, $a(2) = 22$ $a(n+3) = 8a(n+2) - 21a(n+1) + 18a(n)$.

3. Stosując równanie charakterystyczne wyznacz postać jawną ciągu:

   (a) $a(0) = 0$, $a(1) = 1$, $a(n+2) = a(n+1) + a(n) + 1$.

   (b) $a(0) = 1$, $a(1) = 1$, $a(n+2) = \frac{7}{4}a(n+1) + \frac{1}{2}a(n) + 1$,

   (c) $a(0) = 3$, $a(1) = 3$, $a(n+2) = a(n+1) + 2a(n) + 6$.

4. Wyznacz funkcję tworząca ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie i na jej podstawie określ kilka początkowych elementów ciągu oraz jego postać jawną.

   (a) $a(0) = 2$, $a(1) = 5$, $a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n)$ dla $n \geqslant 0$,

   (b) $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(2) = 3$, $a(3) = 4$, $\ldots$, $a(n) = n + 1$.

   (c) $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(n+2) = a(n+1) - a(n) + n + 2$ dla $n \geqslant 0$,

   (d) $a(0) = 1$, $a(1) = 2\sqrt{2}$, $a(n) = 2\sqrt{2}a(n-1) - 2a(n-2) + \sqrt{2}^n$ dla $n \geqslant 2$.

5. Wyznaczyć liczbę a_n ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

6. Na ile sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów, a pozostałe jednego metra?

7. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt:

   (a) o wymiarach 2 na n kostkami domino o wymiarach 2 na 1,

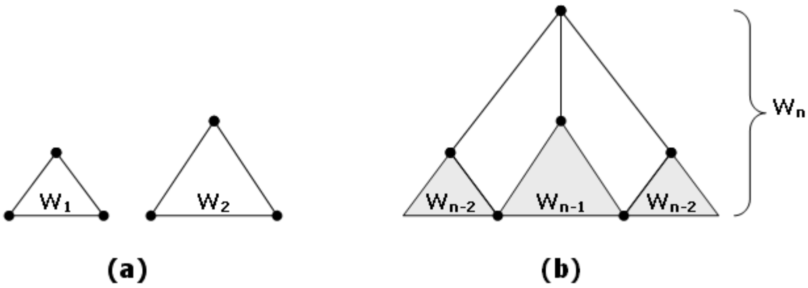
   (b) o wymiarach 3 na $2n$ tymi samymi kostkami?

   Sformułuj odpowiednią zależność rekurencyjną oraz podaj jej rozwiązanie.

8. Pewna cząsteczka porusza się w kierunku poziomym i w każdej sekundzie pokonuje odległość równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej. Niech $a(n)$ oznacza pozycję cząsteczki po n sekundach. Określić $a(n)$, wiedząc, że $a(0) = 3$ oraz $a(3) = 10$.

9. Pewien rzemieślnik wykonuje trójkątne witraże. Podstawowe witraże jakie produkuje, to witraż rozmiaru W_1 oraz witraż W_2, każdy z nich wymaga trzech połączeń krawędzi, tzw. lutów – zobacz rysunek (a). Witraż W_n, dla $n > 2$, konstruowany jest przez zlutowanie ze sobą, w sześciu punktach, dwóch witraży W_{n-2} i jednego witrażu rozmiaru W_{n-1} zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku (b). Koszt pojedynczego lutu wynosi dwa złote. Oblicz, ile kosztuje wykonanie witrażu rozmiaru W_n jeżeli założymy, że koszt produkcji witarżu jest określony kosztem wykonanych lutów. Podaj postać zwartą poszukiwanego rozwiązania wyrażoną względem parametru n.

10. Na ile sposobów można ustawić w kolejce po bilety na dworcu PKP n osób? Rozważmy ciąg $a(n)$, gdzie $a(n)$ jest liczbą możliwych ustawień w kolejce n osób. Znajdź zależność rekurencyją opisującą ten ciąg oraz podaj jej rozwiązanie.



11. Znajdź liczbę obszarów, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przecinają wszystkie proste (żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt).

12. Rozważmy następujący algorytm $Alg(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $Cos(n)$ jest procedurą, której obliczenie wymaga wykonania $f(n)$ operacji dominujących:

$$Alg(n) = \{if \;\; n \; > \; 0 \;\; then \;\; Alg(n-1); \;\; Cos(n); \;\; fi\}.$$

Niech dalej $T(n)$ oznacza liczbę operacji dominujących jakie wykona algorytm Alg dla argumentu n. Podaj równanie rekurencyjne definiujące wartość $T(n)$ oraz jego rozwiązanie, gdy:

(a) $f(n) = 2$,
(b) $f(n) = n^2 + 2$,
(c) $f(n) = f(n-1) + n$, dla $n > 0$ oraz $f(0) = 0$,
(d) $f(n) = T(n-1) + 2^n$,
(e) $f(n) = nT(n-1) + n + 1$,
(f) $f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 1$.

13. Korzystając z twierdzenia o rekursji uniwersalnej podaj oszacowanie rozwiązania następujących równań rekurencyjnych:

(a) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n^3 + n$,
(b) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + \sqrt{n}$,
(c) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}$,
(d) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + 3lgn!$,
(e) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$.

14. Rozważmy następujący algorytm $Alg(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $Cos(n) = n^2$ jest procedurą, której obliczenie wymaga wykonania n operacji dominujących.

(a) $Alg(n) = \{if \;\; n \; > \; 2 \;\; then \;\; Alg(\frac{n}{2}); \;\; Alg(\frac{n}{2}); \;\; Cos(n); \;\; fi\}$.
(b) $Alg(n) = \{if \;\; n \; > \; 2 \;\; then \;\; Alg(\frac{n}{2}); \;\; Cos(Cos(n)); \;\; fi\}$.
(c) $Alg(n) = \{if \;\; n \; > \; 1 \;\; then \;\; Alg(Cos(\frac{\sqrt{n}}{2})); \;\; Cos(\frac{\sqrt{n}}{2}); \;\; fi\}$.
(d) $Alg(n) = \{if \;\; n \; > \; 1 \;\; then \;\; for \;\; i := 1 \;\; to \;\; k^2 \;\; do \;\; Alg(\frac{n}{k}); \;\; od \;\; Cos(n^2); \;\; fi \;\; \}$, gdzie k jest pewną stałą.

Ustal równanie rekurencyjne opisujące liczbę wykonań operacji dominujących w trakcie realziacji algorytmu $Alg(n)$. Następnie w oparciu o twierdzenie o rekursji uniwersalnej podaj oszacowanie rozwiązania owego równania.