RACHUNEK ZDAŃ I METODY DOWODZENIA

1. Które z następujących wyrażeń są zdaniami? Podaj wartości logiczne tych zdań.
   (a) 2 jest liczbą pierwszą lub nie jest prawdą, że 3 jest liczbą parzystą.
   (b) Dlaczego logika jest ważna?
   (c) Liczba 4 jest dodatnia, a liczba 3 jest ujemna.
   (d) $x - y = y - x$.
   (e) Jeżli $3 \cdot 2 = 1$, to $\cos(2006^o) > \frac{1}{2}$.
   (f) Matematyka jest zabawna.

2. Niech p, q, r i s będą następującymi zdaniami:
   - p = $\textit{wartość}(X) > 0$,
   - q = $\textit{wartość}(Y) > 0$,
   - r = wyniki są wyświetlane na ekranie,
   - s = $\textit{wartość}(X) := \textit{wartość}(X) + 1$.

   Zapisz każde z poniższych zdań za pomocą symboliki logicznej.
   (a) Jeśli nie jest prawdą, że $\textit{wartość}(X) > 0$, to $\textit{wartość}(X) := \textit{wartość}(X) + 1$.
   (b) Wyniki są wyświetlane na ekranie wtedy i tylko wtedy, gdy $\textit{wartość}(X) > 0$.
   (c) Jeśli $\textit{wartość}(X) > 0$ i $\textit{wartość}(Y) > 0$, to wyniki są wyświetlane na ekranie.

3. Określ wartość logiczną zdania:
   (a) 1 jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy 1 jest liczbą niewymierną i 1 jest liczbą nieparzystą.
   (b) 5 jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy 2 jest liczbą nieparzystą lub 3 jest liczbą parzystą.
   (c) Jeśli 2 jest liczbą parzystą, to 4 jest liczbą nieparzystą lub 5 jest liczbą nieparzystą.
   (d) Jeśli 2 nie jest liczbą naturalną, to $\ln(3,24) > 5$ lub $\log(3,24) > 5$.
   (e) Jeśli $\sin 5 > \frac{1}{2}$, to 5 jest liczbą nieparzystą.
   (f) Jeśli $\ln e > \frac{1}{2}$, to $\ln 100 > \frac{1}{2}$ i $\ln 1 > \frac{1}{2}$.

4. Wykaż, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku zdań. Zastosuj dwie metody: „zerojedynkową" i „nie wprost".
   (a) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$- określenie implikacji za pomocą alternatywy
   (b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$- prawo de Morgana
   (c) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$
   (d) $((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$
   (e) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$

5. Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami rachunku zdań. Jeśli nie, to podaj dla jakich wartości zmiennych p, q, r formuły te są fałszywe.
   (a) $p \to (\neg p \vee q)$
   (b) $(p \to q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)$
   (c) $(p \to q) \to (p \to (q \vee r))$

(d) $((p \to \neg q) \vee (p \to r)) \leftrightarrow (q \vee r)$
(e) $(p \to (\neg q \vee r)) \to (\neg p \to (q \wedge r))$

6. Dla każdej z podanych formuł zaproponuj najkrótszą formułę jej równoważną, jaką umiesz znaleźć. Dopuszczalne są także formuły ***true*** i ***false***. Udowodnij równoważność.

   (a) $p \to (p \wedge q)$
   (b) $(p \to q) \vee q$
   (c) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
   (d) $((p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge r)) \to \neg q$

7. Chcemy zbudować tabelę wartości logicznych dla formuły zawierającej n zmiennych. Ile wartościowań należy rozważyć?

8. Ile można zdefiniować różnych spójników

   (a) unarnych,
   (b) binarnych,
   (c) ternarnych?

9. Czy za pomocą spójników $\neg$, $\wedge$ można wydefiniować spójniki

   (a) $\vee$,
   (b) $\to$,
   (c) $\leftrightarrow$?

10. Czy za pomocą spójników $\neg$, $\to$ można wydefiniować spójniki

   (a) $\vee$,
   (b) $\wedge$,
   (c) $\leftrightarrow$?

11. Alternatywa wykluczająca XOR jest zdefiniowana za pomocą matrycy:

p	q	$p\ XOR\ q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Zbuduj matryce logiczne dla zdań:

   (a) $(p\ XOR\ p)\ XOR\ p$
   (b) $(p\ XOR\ q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

12. Podaj dowód formalny twierdzenia $(p \wedge \neg r)$ z $(q \to p)$ i $(q \wedge \neg r)$.

13. Z tautologii $(p \to (q \to p))$ i $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ wyprowadź za pomocą reguł wnioskowania tautologie:

   (a) $p \to p$,
   (b) $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

14. Udowodnij, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q mamy:

   (a) $p \vee q \leftrightarrow q$,
   (b) $p \wedge q \leftrightarrow p$.

15. Zaproponuj zdanie złożone ze zmiennych zdaniowych p, q, r, które:

    (a) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie jedna z trzech zmiennych p, q, r jest prawdziwa,

    (b) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie dwie z trzech zmiennych p, q, r są prawdziwe.

16. Rozważ następujący zbiór zdań:

    - Jeśli się nie mylę, to dzisiaj jest sobota.
    - Albo dzisiaj to nie wczoraj, albo dzisiaj jest piątek.
    - Nie mylę się, jeśli jesteś tutaj.
    - Jeśli dzisiaj jest piątek, to dzisiaj nie jest sobota.
    - Jeśli dzisiaj jest sobota, to wczoraj był piątek.

    Zapisz powyższe zdania w postaci formuł rachunku zdań. Zbadaj niesprzeczność tego zbioru. Zakładając, że powyższe zdania są prawdziwe, zbadaj czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź starannie uzasadnij.

    (a) Jeśli się nie mylę, to jesteś tutaj.

    (b) Jeśli dzisiaj jest piątek, to nie mylę się.

    (c) Jeśli się mylę, to wczoraj był piątek.

17. Zapisz poniższe zdania w postaci formuł rachunku zdań i zbadaj, czy tworzą one zbiór niesprzeczny.

    (a) Jeśli x jest liczbą dodatnią, to x jest liczbą parzystą. Jeśli x nie jest liczbą parzystą, to x nie jest liczbą wymierną lub x jest liczbą dadatnią. x jest liczbą wymierną.

    (b) Jeśli x nie spełnia warunku W, to x spełnia warunek Q lub x spełnia warunek R. Jeśli x spełnia warunek Q, to x nie spełnia warunku R lub x nie spełnia warunku W. x nie spełnia warunku W i x nie spełnia warunku R.

    (c) $x$spełnia warunek W wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą parzystą i x jest liczbą pierwszą. Jeśli x nie jest liczbą pierwszą, to x nie jest liczbą parzystą. x spełnia warunek W lub x jest liczbą pierwszą.

    (d) Jeśli x spełnia warunek P, to x spełnia warunek Q i x spełnia warunek S. Jeśli x nie nie spełnia warunku R, to x nie spełnia warunku Q. x spełnia warunek P i x nie spełnia warunku R.

18. Zbadaj, czy podane rozumowanie jest poprawne. Jeśli tak, to wskaż regułę, na której jest ono oparte.

    (a) Jeśli $f = \Theta(g)$, to $f = O(g)$. Wiem, że $f = \Theta(g)$. Zatem $f = O(g)$.

    (b) Jeśli $f = \Theta(g)$, to $f = O(g)$. Nieprawda, że $f = O(g)$. Zatem nieprawda, że $f = \Theta(g)$.

    (c) Relacja r jest symetryczna na zbiorze U. Zatem relacja r jest symetryczna na zbiorze U lub relacja r jest przechodnia na zbiorze U.

    (d) Relacja r jest symetryczna na zbiorze U i relacja r jest zwrotna na zbiorze U. Zatem relacja r jest symetryczna na zbiorze U.

    (e) Jeśli funkcja $f : U \to U$ jest funkcją różnowartościową, to jest funkcją na zbiór U. Jeśli funkcja $f : U \to U$ nie jest funkcją różnowartościową, to jest funkcją na zbiór U. Zatem $f : U \to U$ jest funkcją na zbiór U.

    (f) Jeśli dana wejściowa programu P spełnia warunek W, to program P ma obliczenie skończone. Zatem jeśli program P nie ma obliczenia skończonego, to dana wejściowa nie spełnia warunku W.

    (g) Jeśli dana wejściowa programu P spełnia warunek W, to program P ma obliczenie skończone. Zatem jeśli program P ma obliczenie skończone, to dana wejściowa spełnia warunek W.

    (h) Z faktu, że dana wejściowa programu P spełnia warunek W i program P nie ma obliczenia skończonego wynika, że dana wejściowa programu P nie spełnia warunku W. Zatem jeśli dana wejściowa spełnia warunek W, to program P ma obliczenie skończone.

(i) Jeśli dana wejściowa programu P spełnia warunek W, to program P ma obliczenie skończone. Zatem jeśli dana wejściowa programu P nie spełnia warunku W, to program P nie ma obliczenia skończonego.

(j) Jeśli dana wejściowa programu P spełnia warunek W, to program P ma obliczenie skończone. Zatem dana wejściowa programu P nie spełnia warunku W lub program P ma obliczenie skończone.

(k) Jeśli dana wejściowa programu P spełnia warunek $W1$, to dana wyjściowa programu P spełnia warunek $W2$. Jeśli dana wyjściowa programu P spełnia warunek $W2$, to spełnia także warunek $W3$. Zatem dana wejściowa programu P spełnia warunek $W1$ lub dana wyjściowa programu P spełnia warunek $W3$.

19. Znajdź kontrprzykłady na poniższe stwierdzenia.

(a) Jeśli m, n są niezerowymi liczbami całkowitymi, które są nawzajem podzielne przez siebie, to $m = n$.

(b) Dla każdej liczby naturalnej n prawdą jest, że $n^2 < 2^n$.

20. Udowodnij wprost poniższe stwierdzenia.

(a) Jeżeli a i b są nieparzystymi liczbami całkowitymi, to $a + b$ jest parzystą liczbą całkowitą.

(b) Jeżeli a jest liczbą całkowitą taką, że a—4 jest podzielne przez 5, to $a^3 + 1$ jest podzielne przez 5.

21. Udowodnij poniższe stwierdzenia. Zastosuj metodę „nie wprost“.

(a) Udowodnić nie wprost, że jeżeli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n też jest liczbą nieparzystą.

(b) Jeśli iloczyn dwóch liczb całkowitych a i b jest liczbą parzystą, to a jest liczbą parzystą lub b jest liczbą parzystą.

(c) Jeśli liczba naturalna N nie jest liczbą pierwszą, to posiada dzielnik różny od 1 i nie większy niż $\sqrt{N}$.

22. Stosując metodę „nie wprost“ udowodnij, że

(a) Złożeniem funkcji różnowartościowych jest funkcja różnowartościowa.

(b) Jeśli relacja r określona w zbiorze U jest symetryczna, to relacja r^{-1} też jest symetryczna.

(c) Jeśli r jest symetryczną i przechodnią relacją określoną w zbiorze U, to r jest relacją zwrotną.

(d) Jeśli relacje r_1 i r_2 określone w zbiorze U są antysymetryczne, to relacja $r_1 \cap r_2$ też jest antysymetryczna.

(e) Jeżeli r i s są przechodnimi relacjami określonymi w zbiorze U, to ich przecięcie $r \cap s$ też jest relacją przechodnią.

(f) Jeżeli relacje r i s określone w zbiorze U są symetryczne, to ich suma $r \cup s$ też jest relacją symetryczną.

(g) Element najmniejszy w zbiorze częściowo uporządkowanym jest elementem minimalnym w tym zbiorze.

(h) Element maksymalny w zbiorze liniowo uporządkowanym, o ile istnieje, jest elementem największym w tym zbiorze.