

## Moce zbiorów

- Sprawdź, czy poniższe zbiory są równoliczne?
  - $X = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x < 10\}$  i  $Y = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ jest liczbą parzystą } < 20\}$ ,
  - $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$  i  $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x^2 < 70\}$ ,
  - $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$  i  $B = \emptyset$ ,
  - Zbiór liczb podzielnych przez 2 i zbiór liczb podzielnych przez 4.
- Zbadaj, czy zbiór wszystkich liczb postaci  $a\sqrt{2} + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb niewymiernych.
- Dowieść, że następujące zbiory są co najwyżej przeliczalne. Podać, które z nich mają moc  $\aleph_0$ .
  - $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$
  - $\{x \in \mathbb{N} : \text{istnieje liczba rzeczywista } y \text{ taka, że } x = \sin y\}$
- Udowodnić, że zbiór słów nad alfabetem skończonym jest zbiorem przeliczalnym.
- Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych dodatnich jest mocy  $\aleph_0$ .
- Udowodnić, że zbiór wszystkich odcinków położonych na osi liczb rzeczywistych, o końcach w punktach wymiernych, jest mocy  $\aleph_0$ .
- Weźmy graf  $G = (V, E)$ . Niech  $P$  - zbiór wszystkich dróg w tym grafie. Udowodnij, że jeśli  $E$  jest zbiorem skończonym, to  $P$  jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.
- Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc  $\mathfrak{c}$ .
  - $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 4\}$
  - $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 4\}$
- Udowodnić, że poniższe zbiory są nieprzeliczone:
  - zbiór wszystkich funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,
  - zbiór wszystkich funkcji ze zbioru liczb parzystych w zbiór  $\{a, b, c\}$ .
- Udowodnić, że jeśli  $A$  jest zbiorem mocy  $\aleph_0$ , a  $B$  zbiorem mocy  $\mathfrak{c}$ , to produkt  $A \times B$  ma moc  $\mathfrak{c}$ .
- Niech  $A$  i  $B$  będą zbiorami skończonymi takimi, że  $|A| < |B|$ . Czy następujące zdania są prawdziwe czy fałszywe?
  - Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru  $A$  w zbiór  $B$ .
  - Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru  $A$  na zbiór  $B$ .
  - Istnieje przekształcenie różnowartościowe zbioru  $B$  w zbiór  $A$ .