Algebra zbiorów

1. Wyznacz elementy zbioru:

   (a) $A = ((-5, 6]\backslash\{-2, 3\}) \cap \mathbb{Z}$,

   (b) $B = ((-5, 6]\backslash[-2, 3)) \cap \mathbb{N}$,

   (c) $C = (\{-5, 3\}\backslash[-2, 3]) \cap \mathbb{R}_+$,

   (d) $D = (\{-5, 3\} \cap \mathbb{R}_+) \cup ([-2, 3] \cap \mathbb{Z}_-)$.

2. Rozważmy algorytm:

   $$Alg = \{x := 0;\ \ y := 0;\ \ while\ \ x^2 \leqslant 50\ \ do\ \ x := x + 1;\ \ y := x\ div\ 2\ \ od\}.$$

   Wypisz

   (a) wybrane zbiory,

   (b) wybrane ciągi,

   jakie można utworzyć korzystając z (nie koniecznie wszystkich) liczb naturalnych y osiągalnych poprzez wykonanie tego algorytmu, z uwzględnieniem krotności ich występowania. Czy liczba otrzymanych zbiorów odpowiada liczbie uzyskanych ciągów?

3. Liczby naturalne można definiować jako zbiory stosując następującą definicję von Neumanna:

   $$0 =^{def} \emptyset,\ \ 1 =^{def} \{0\},\ \ n + 1 =^{def} \{0, 1, , \ldots, n\}.$$

   Na przykład $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{0\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Korzystając z tej definicji

   (a) wyznacz liczby 3, 4, 5,

   (b) zaproponuj algorytm obliczający liczbę naturalną n,

   (c) zaproponuj algorytm wyznaczający n pierwszych liczb naturalnych.

4. Rozważmy następujący algorytm:

   $$Alg(A, n) = \{\ if\ \ n > 0\ then\ \ A := P(Alg(A, n - 1));\ \ fi\ \ return\ \ A\}.$$

   Wyznacz końcową wartość zbioru A uzyskaną po wykonaniu algorytmu:

   (a) $Alg(\emptyset, 0)$,

   (b) $Alg(\{0, 1\}, 2)$,

   (c) $Alg(\emptyset, 3)$.

   Jaka jest moc $Alg(\emptyset, k)$?

5. Ile elementów ma zbiór:

   (a) $E = \{x\ :\ x \in \mathbb{N},\ x$ jest wielokrotnością liczby 4 i $x < 50\}$,

   (b) $F = \{2 + (-1)^n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$,

   (c) $G = \{3z + 1\ :\ z \in \mathbb{Z}$ i $|z| < 4\}$,

   (d) $H = \emptyset$,

   (e) $I = \{\emptyset\}$,

   (f) $J = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

   (g) $K = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$?

   Ile podzbiorów ma każdy z wymienionych zbiorów?

6. Wyznacz zbiory potęgowe zbiorów $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{a\}$, $\{0, 10, 11\}$.

7. Rozważmy program $Pr_1(n) = \{x := 0;\ \ y := 0;\ \ while\ \ y < 20\ \ do\ \ y := x + 1;\ \ x := y \cdot n\ \ od\}$. Niech $X(n)$ oznacza zbiór wszystkich wartości y osiągalnych poprzez wykonanie programu $Pr_1(n)$. Wyznacz zbiór potęgowy zbioru $X(2) \cap X(3)$.

8. Rozważmy następujące algorytmy:

$$Alg1(A, n) = \{\ if\ \ n > 0\ \ A := Alg1(A, n-1);\ \ fi\ \ A := A \cup \{n\};\ \ return\ \ A\},$$

$$Alg2(B, n) = \{\ if\ \ n > 0\ \ B := Alg2(B, n-1);\ \ fi\ \ B := B \oplus \{n\};\ \ return\ \ B\}.$$

Wypisz elementy zbiorów $Alg1(\emptyset, 7)$ i $Alg2(\mathbb{N}, 2)$ oraz wyznacz ich sumę, iloczyn, różnicę oraz dopełnienie przyjmując za uniwersum zbiór liczb naturalnych $\Omega = \mathbb{N}$.

9. Rozważmy program $Pr_2(n) = \{x := 0;\ \ y := 0;\ \ while\ \ y \geqslant 0\ \ do\ \ y := y + 1;\ \ x := y \cdot n;\ \ od\}$. Niech $\mathbb{N}(n)$ oznacza zbiór wszystkich wartości x osiągalnych poprzez wykonanie programu $Pr_2(n)$. Które z poniższych zależności są prawdziwe?

   (a) $\mathbb{N}(2) \cap \mathbb{N}(3) = \mathbb{N}(6)$,
   (b) $\mathbb{N}(3) \subset \mathbb{N}(6)$,
   (c) $\mathbb{N}(6) \cup \mathbb{N}(3) = \mathbb{N}(3)$,
   (d) $\mathbb{N}(2) \backslash \mathbb{N}(4) = \emptyset$.

10. Niech $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

   (a) Czy zbiór $\mathbb{Z}_5$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Z}_6$?
   (b) Wymień wszystkie elementy zbioru $P(\mathbb{Z}_2)$.
   (c) Czy zbiory $A = (\mathbb{Z}_6 \backslash \mathbb{Z}_4) \cup \mathbb{Z}_3$ i $B = \mathbb{Z}_5$ są równe?
   (d) Wyznaczyć $\mathbb{Z}_3'$ przy założeniu, że zbiorem uniwersalnym jest $\mathbb{Z}_{10}$.

11. Niech $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^*\ :\ \text{długość}(w) \leqslant 2\}$ i $C = \{w \in \Sigma^*\ :\ \text{długość(w)} \geqslant 2\}$ oraz niech Σ^* będzie zbiorem uniwersalnym. Wyznacz:

   (a) B', $B' \cap C'$,
   (b) $A \cap C$, $A \backslash C$, $\Sigma \backslash B$,
   (c) $P(\Sigma)$.

12. Rozważmy programy

$$Pr_3 = \{x := -2;\ \ while\ \ |x| < 3\ \ do\ \ x := x + 1;\ \ od\},$$

$$Pr_4 = \{x := 0;\ \ y := 1;\ \ while\ \ y < 28\ \ do\ \ x := x + 1;\ \ y := 3^x\ \ od\}.$$

Niech A oznacza zbiór wszystkich wartości x osiągalnych poprzez wykonanie programu Pr_3 oraz niech B oznacza zbiór wszystkich wartości x osiągalnych poprzez wykonanie programu Pr_4. Wypisz lub narysuj elementy zbioru:

   (a) $\{(m, n) \in A \times B\ :\ m < n\}$,
   (b) $\{(m, n) \in B \times A\ :\ m < n\}$,
   (c) $\{(m, n) \in A \times B\ :\ \min\{m, n\} < 0\}$,
   (d) $\{(m, n) \in B \times A\ :\ m + n \text{ jest liczbą pierwszą}\}$.

13. Wyznaczyć $\bigcap_{t \in T} A_t$ oraz $\bigcup_{t \in T} A_t$ gdy:

   (a) $T = \{2, 3, 4\}$, $A_t = \mathbb{Z}_t$, gdzie $\mathbb{Z}_t = \{0, 1, 2, ..., t-1\}$
   (b) $T = \{1, 2, 3\}$, $A_t = [t-3, t+1]$.

14. Wyznaczyć $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gdy:

   (a) $A_n = \mathbb{Z}_n$, gdzie $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$,
   (b) $A_n = \mathbb{Z}(n)$, gdzie $\mathbb{Z}(n)$ oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez n,

(c) $A_n = [0, \frac{1}{n}]$.

15. Udowodnić, że dla dowolnych rodzin $\{A_t\}_{t\in T}$ oraz $\{B_t\}_{t\in T}$:

(a) $\bigcap_t (A_t \cap B_t) = \bigcap_t A_t \cap \bigcap_t B_t$,

(b) $\bigcup_t (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_t A_t \cap \bigcup_t B_t$.

16. A i B oznaczają zbiory niepuste. Jaki jest związek między tymi zbiorami, jeśli:

(a) $(A \cup B) \subseteq B$,

(b) $A \subseteq (A \cap B)$,

(c) $A \subseteq (A \backslash B)$,

(d) $A \cup B = B$.

17. Czy istnieją zbiory A, B i C takie, że $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \backslash C = \emptyset$?

18. Wskaż, które ze zdań są prawdziwe, a które fałszywe. Dla każdego fałszywego zdania podaj kontrprzykład.

(a) Jeśli $A \cap B = A \cap C$, to $B = C$.

(b) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ dla wszystkich zbiorów A, B.

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ dla wszystkich zbiorów A, B, C.

19. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C:

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

(b) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$,

(c) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$,

(d) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$,

(e) $A \cap B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B' \cup C$,

(f) $(A \backslash B) \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.

20. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące równości:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(b) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

21. Różnicą symetryczną dwu zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Dowieść, że:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$,

(b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.