Wykład 12 – zadania domowe- ODP

1. **Napisać macierze przejścia z bazy *B* do bazy *B'* odpowiednich przestrzeni liniowych:**
   a. $V = R^3$,
   $B = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$, $B' = \{[3, 3, 4], [-1, 2, 2], [1, 1, 1]\}$.

   Zgodnie z definicją macierzy przejścia z bazy do bazy mamy:

$$[3,3,4] = 3\cdot[1,0,0] + 3\cdot[0,1,0] + 4\cdot[0,0,1]$$
$$[-1,2,2] = -1\cdot[1,0,0] + 2\cdot[0,1,0] + 2\cdot[0,0,1]$$
$$[1,1,1] = 1\cdot[1,0,0] + 1\cdot[0,1,0] + 1\cdot[0,0,1]$$
$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. $V = R_2[x]$ - przestrzenią liniową wielomianów stopnia ≤ 2;
   $B = \{ x + 1, x + 2, x^2 + 1\}$, $B' = \{ x + 3, x + 4, x^2\}$.

I sposób: poprzez utożsamienie z przestrzenią R^3

Bazą kanoniczną w $R_2[x]$ jest $Bk = \{ 1, x, x^2\}$. Możemy ją utożsamiać z bazą kanoniczną przestrzeni R^3: $(Bk)^3 = \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$.

Podobnie $B = \{ x + 1, x + 2, x^2 + 1\}$ utożsamiamy z $(B)^3 = \{[1,1,0],[2,1,0],[1,0,1]\}$

$B' = \{ x + 3, x + 4, x^2\}$ utożsamiamy z $(B')^3 = \{[3,1,0],[4,1,0],[0,0,1]\}$

Znajdujemy macierz przejścia między $(Bk)^3$ i $(B)^3$: $P1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Znajdujemy macierz przejścia między $(Bk)^3$ i $(B')^3$: $P2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Macierz przejścia między $(B)^3$ i $(B')^3$ wyraża się wzorem

$$P = (P1)^{-1}\cdot P2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II sposób: wprost z definicji macierzy przejścia

$$x+3=a(x+1)+b(x+2)+c(x^2+1)$$
$$x+3=ax+a+bx+2b+cx^2+c$$
$$x+3=cx^2+(a+b)x+(a+c+2b)$$
$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ a+c+2b=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ a+2b=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=0 \\ b=2 \\ a=-1 \end{cases}$$
$$x+4=cx^2+(a+b)x+(a+c+2b)$$
$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ a+2b+c=4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ a+2b=4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=0 \\ b=3 \\ a=-2 \end{cases}$$
$$x^2=cx^2+(a+b)x+(a+c+2b)$$
$$\begin{cases} c=1 \\ a+b=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=1 \\ b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$
$$P=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Napisać macierze podanych przekształceń liniowych $L: U \to U$ w podanych bazach przestrzeni U. Zastosować wzór na zmianę macierzy przekształcenia przy zmianie bazy:

$$L(x,y) = (x+3y, y-3x), \quad U = R^2, \quad \vec{u_1} = (2,1), \vec{u_2} = (-1,3)$$

Wiadomo, że $\quad A' = P^{-1}AP$

Znajdujemy macierz przekształcenia A w bazie standardowej {[1,0],[0,1]}

$$L(1,0) = [1,-3] \quad L(0,1) = [3,1]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdujemy macierz przejścia P z bazy standardowej do bazy U :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Znajdujemy odwrotność macierzy P:

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy macierz A':

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ -15 & 4 \end{bmatrix}$$

3. **Zbadać diagonalizowalność macierzy:**

$$\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (11-\lambda)(3-\lambda)+16 = 33-11\lambda-3\lambda+\lambda^2+16 =$$

$$= \lambda^2 - 14\lambda + 49$$

$$\Delta = 196 - 196 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 7$$

Macierz ma tylko jeden niezależny wektor własny tak więc nie może być diagonalizowalna

4. **Macierz przekształcenia *A* ma w bazie kanonicznej postać:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdź macierz tego przekształcenia w bazie {[0, 0, 1}, [1, 0, 1], [1, 1, 1]}.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{11} = -1 \quad D_{12} = 1 \quad D_{13} = 0$$

$$D_{21} = 0 \quad D_{22} = -1 \quad D_{23} = 1$$

$$D_{31} = 1 \quad D_{32} = 0 \quad D_{33} = 0$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$