Wykład 10 –zadania domowe-ODP

1. **Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej V. Zbadać linową niezależność wektorów:**

$$\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}$$

Tworzymy kombinację liniową podanych wektorów i rozwiązujemy równanie na współczynniki p,q,r,s :

$$p\vec{u}+q\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+r\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)+s\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}\right)=0$$

$$p\vec{u}+q\vec{u}+q\vec{v}+r\vec{u}+r\vec{v}+r\vec{w}+s\vec{u}+s\vec{v}+s\vec{w}+s\vec{x}=0$$

$$(p+q+r+s)\vec{u}+(q+r+s)\vec{v}+(r+s)\vec{w}+d\vec{x}=0$$

$$\begin{cases} p+q+r+s=0 \\ q+r+s=0 \\ r+s=0 \\ s=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \\ r=0 \\ s=0 \quad c.b.d.u. \end{cases}$$

2. **Znajdź bazę odpowiedniej przestrzeni liniowej, w której wektor $\vec{v} = [2,-1,3] \in R^3$ ma współrzędne $[1,0,1]$.**

Przedstawiamy wektor [2,-1,3] w szukanej nieznanej bazie i znajdujemy równania na współrzędne wektorów bazy:

$$[2,-1,3] = 1[x_1, x_2, x_3] + 0[y_1, y_2, y_3] + 1[z_1, z_2, z_3]$$
$$\begin{cases} x_1 + z_1 = 2 \\ x_2 + z_2 = -1 \\ x_3 + z_3 = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z_1 = 2 - x_1 \\ z_2 = -1 - x_2 \\ z_3 = 3 - x_3 \end{cases}$$

Widać że istnieje wiele rozwiązań – wybieramy jedno przykładowe.

Przykładowa baza:

$$\vec{x} = [2,-1,0]$$
$$\vec{y} = [0,1,0]$$
$$\vec{z} = [0,0,3]$$

3. **Znajdź wartość parametru *x*, dla której iloczyn skalarny wektorów $[2, x, 5]$ i $[-3,1,2x]$ jest równy 2.**

Obliczamy iloczyn skalarny i przyrównujemy do wartości 2 i wyliczamy x:

$$[2, x, 5] \circ [-3,1,2x] = -6 + x + 10x = 2$$

$$x = \frac{8}{11}$$

4. **Oblicz kąt między wektorami: $[1,0,0]$ i $[0,1,0]$.**

Korzystamy ze wzoru na cosinus kąta między wektorami:

$$\cos\varphi = \frac{[1,0,0] \circ [0,1,0]}{|[1,0,0| \cdot |[0,1,0]|} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$