Wykład 6 – zadania domowe - odpowiedzi

1. Oblicz macierz odwrotną do macierzy:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \quad \det(A)=-44\neq 0 \quad \Rightarrow istnieje\ A^{-1}$$

$$D_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-4$$

$$D_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-23$$

$$D_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6$$

$$D_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8$$

$$D_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9$$

$$D_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10$$

$$D_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4$$

$$D_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-1$$

$$D_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6$$

$$D=\begin{bmatrix}-4 & -23 & -6\\ -8 & 9 & 10\\ -4 & -1 & -6\end{bmatrix}$$

$$A^D=D^T=\begin{bmatrix}-4 & -8 & -4\\ -23 & 9 & -1\\ -6 & 10 & -6\end{bmatrix} \qquad ODP: A^{-1}=\frac{A^D}{|A|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{1}{11}\\ \frac{23}{44} & -\frac{9}{44} & \frac{1}{44}\\ \frac{3}{22} & -\frac{5}{22} & \frac{3}{22}\end{bmatrix}$$

2. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 8 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix} + 6(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 147 - 2 \cdot 395 + 1 \cdot -51 - 6 \cdot (-33) = 441 - 790 - 51 + 198 = -202$$

3. Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązanie równania:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$$

Wyznacznik jest równy 0 w takim wypadku jeśli jeden z wierszy (jedna z kolumn) jest kombinacją liniową pozostałych. Dla tej macierzy taka własność zachodzi dla x=1 lub x=2 lub x=3

Np. Dla x=1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ ponieważ } wiersz_4 = 4 \cdot wiersz_1$$

4. Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć wyznacznik:

$$\det\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -30$$

Permutacja wyjściowa	**Permutacja obliczona**	**Znak permutacji**	**Iloczyn współczynników**	**Wynik iloczynu**
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	+	$a_{11}a_{22}a_{33}$	0
	$(1,3,2)$	-	$a_{11}a_{23}a_{32}$	30
	$(2,1,3)$	-	$a_{12}a_{21}a_{33}$	0
	$(3,2,1)$	-	$a_{13}a_{22}a_{31}$	0
	$(2,3,1)$	+	$a_{12}a_{23}a_{31}$	0
	$(3,1,2)$	+	$a_{13}a_{21}a_{32}$	0