Wykład 4 – zadania domowe- odpowiedzi

1) Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianu

$W(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

Szukamy pierwszego pierwiastka wśród podzielników wyrazu wolnego
tj. wśród liczb: -1,1,-2,2,-3,3

Znajdujemy że W(1) = 0

Teraz wykorzystując schemat Hornera znajdujemy wynik dzielenia W(x) przez (x-1):

	1	1	-5	3
1	1	2	-3	0

$x_1 = 1$

$W(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$

$x_3 = \frac{-2+4}{2} = 1$

$ODP: x_1 = x_3 = 1, \quad x_2 = -3$

2) Znając jeden z pierwiastków podanego wielomianu rzeczywistego znaleźć pozostałe pierwiastki:

$$W(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10, \quad z_1 = 1 + 2i$$

Drugim pierwiastkiem jest liczba sprzężona $z_2 = \bar{z}_1 = 1 - 2i$ (z własności wielomianu)

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i) = z^2 - 2z + 5$$

Aby obliczyć pozostałe pierwiastki wykonujemy dzielenie:

$$(z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10) : (z^2 - 2z + 5) = z^2 + z - 2$$

Sposób dzielenia wielomianów:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & z^4 & -z^3 & +z^2 & +9z & -10 & : \; z^2 \; -2z \; +5 \; = \; z^2 + z - 2 \\
- & z^4 & -2z^3 & 5z^2 & & & \\
 & & z^3 & -4z^2 & +9z & -10 & \\
- & & z^3 & -2z^2 & +5z & & \\
 & & & -2z^2 & +4z & -10 & \\
- & & & -2z^2 & +4z & -10 & \\
 & & & = & = & = &
\end{array}$$

$$W(x) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + z - 2)$$

Aby wyliczyć pozostałe dwa pierwiastki bierzemy pod uwagę wielomian:

$$z^2 + z - 2$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$z_3 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$z_4 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$ODP:$

$z_1 = 1 + 2i,$

$z_2 = 1 - 2i$

$z_3 = -2$

$z_4 = 1$

3) Rozwiąż równanie: $z^6 = (3+i)^{12}$

<u>I sposób rozwiązania</u>

$$z^6 = \left((3+i)^2\right)^6$$
$$z^6 = (8+6i)^6$$
$$z_0 = 8+6i$$
$$|z| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$
$$\cos\varphi = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\sin\varphi = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$\varphi = \arccos\frac{4}{5} \quad \wedge \quad \varphi = \arcsin(\frac{3}{5})$$
$$z_0 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\right)$$
$$z_0 = \sqrt[6]{z_p} = \sqrt[6]{r_p}\left(\cos\frac{\varphi_p}{6} + i\sin\frac{\varphi_p}{6}\right)$$
$$z_p = 10^6$$
$$\varphi_p = 6\arccos\frac{4}{5}$$
$$z_k = \sqrt[6]{z_p}\left(\cos\left(\frac{\varphi_p + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_p + 2k\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_1 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$z_2 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$z_3 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \pi\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \pi\right)\right)$$
$$z_4 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$
$$z_5 = 10\left(\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

<u>II sposób rozwiązania</u>

Możemy wykorzystać ogólną teorię pierwiastków stopnia n.

Jeżeli mamy dowolny k-ty pierwiastek to następne pierwiastki znajdziemy stosując wzór:

$$z_{k+l} = z_k \cdot [\cos(l \cdot \frac{2\pi}{n}) + i \cdot \sin(l \cdot \frac{2\pi}{n})] = z_k \cdot [\cos(\frac{2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})]^l \qquad ; \quad l = 1,2,...,n-1$$

Zauważamy że:

$$z^6 = (3+i)^{12} = [(3+i)^2]^6 = (8+i \cdot 6)^6$$

Zatem jednym z pierwiastków jest: $z_k = 8 + i \cdot 6$

Ponieważ dalej:

$$\cos(\frac{2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{n}) = \cos(\frac{2\pi}{6}) + i\sin(\frac{2\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A więc kolejno:

$$z_k = 8 + i \cdot 6$$

$$z_{k+1} = (8+i \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^1 = (4 - 3\sqrt{3}) + i \cdot (3 + 4\sqrt{3})$$

$$z_{k+2} = (8+i \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (-4 - 3\sqrt{3}) + i \cdot (-3 + 4\sqrt{3})$$

$$z_{k+3} = (8+i \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-8) + i \cdot (-6)$$

$$z_{k+4} = (8+i \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^4 = (-4 + 3\sqrt{3}) + i \cdot (-3 - 4\sqrt{3})$$

$$z_{k+5} = (8+i \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^5 = (4 + 3\sqrt{3}) + i \cdot (3 - 4\sqrt{3})$$

4) Obliczyć $\sqrt[4]{-16}$.

$$z = -16$$

$$|z| = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -1 \\ \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \pi + 2k\pi$$

$$z = 16(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-\sqrt{2}) + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = (-\sqrt{2}) + i(-\sqrt{2})$$

$$z_3 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i(-\sqrt{2})$$