Estymacja parametrów rozkładu cechy

Estymujemy parametr θ rozkładu cechy X
Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estymator (punktowy) jest funkcją próby

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

przybliżającą wartość parametru θ

Przedział ufności (estymator przedziałowy) jest przedziałem o końcach zależnych od próby, który z pewnym z góry zadanym prawdopodobieństwem pokrywa nieznaną wartość parametru θ

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n),\ \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n))\} = 1 - \alpha$$

Poziom ufności: prawdopodobieństwo $1 - \alpha$

Co wpływa na długość d przedziału ufności?
1. Liczność próby ($n \nearrow \Longrightarrow d \searrow$)
2. Poziom ufności ($1 - \alpha \nearrow \Longrightarrow d \nearrow$)
3. Wariancja cechy ($\sigma^2 \searrow \Longrightarrow d \searrow$)

Rozkład normalny
Estymacja parametrów

Próba (prosta): $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estymator średniej μ — średnia arytmetyczna

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Estymator wariancji σ^2 — wariancja próbkowa

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Suma kwadratów odchyleń od średniej

$$\mathrm{var}X = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

Estymator odchylenia standardowego σ

$$S = \sqrt{S^2}$$

Szereg rozdzielczy (dane skumulowane)

Przedział klasowy	Liczebność
$x_0 - x_1$	n_1
$x_1 - x_2$	n_2
$\vdots$	$\vdots$
$x_{k-1} - x_k$	n_k
	n

Średnia z próby $(\dot{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2)$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \dot{x}_i n_i$$

Suma kwadratów odchyleń od średniej

$$\mathrm{var} X = \sum_{i=1}^{k} (\dot{x}_i - \bar{X})^2 n_i$$

Liczność próby

Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ i = 1, \dots, n$, to

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

. . . .

Przykład.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że średnia $\bar{X}$ „trafi” bliżej μ niż 0.1σ?

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 0.1\sigma\} = P\{\bar{X} \in (\mu - 0.1\sigma, \mu + 0.1\sigma)\}$$

$$F\left(\frac{(\mu + 0.1\sigma) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - F\left(\frac{(\mu - 0.1\sigma) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$F(0.1\sqrt{n}) - F(-0.1\sqrt{n}) = 2F(0.1\sqrt{n}) - 1$$

n	1	5	10	50
P	0.07966	0.17694	0.24817	0.52050

n	100	500	1000	1500
P	0.68269	0.97465	0.99843	0.99989

Przedział ufności dla średniej

Wariancja σ^2 jest nieznana

Poziom ufności: $1 - \alpha$

$$\left(\bar{X} - t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\ , \quad \bar{X} + t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$t(\alpha; n-1)$: wartość krytyczna rozkładu t (Studenta) z ν stopniami swobody

Długość przedziału: $d = 2t(\alpha; n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

Przedziały jednostronne

$$(-\infty, \quad \bar{X} + t(2\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$$(\bar{X} - t(2\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \infty)$$

Przykład.

Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować wartość średnią rozkładu obserwowanej cechy.

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\mathrm{var}X = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$s^2 = \frac{0.36}{10 - 1} = 0.04, \qquad s = \sqrt{s^2} = 0.2$$

Poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$, czyli $\alpha = 0.05$.

$$t(0.05; 9) = 2.2622$$

$$t(0.05; 9)\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.2622\frac{0.2}{\sqrt{10}} = 0.14$$

$$(1 - 0.14, 1 + 0.14) = (0.86, 1.14)$$

Wniosek. Średnia wartość cechy jest jakąś liczbą z przedziału $(0.86, 1.14)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Przykład.
Oszacować przeciętną ilość punktów uzyskiwanych na klasówce.

$$n = 300 \quad \sum x_i = 176.566 \quad \sum x_i^2 = 107.845302$$

Populacja:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki

Cecha X:
ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Zadanie: oszacować parametr μ

Technika statystyczna:
przedział ufności dla średniej
poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$

Obliczenia

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{176.566}{300} = 0.589$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}X &= \sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2 \\ &= 107.845302 - \frac{176.566^2}{300} = 3.92679\end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{3.92679}{300-1} = 0.01313, \qquad s = \sqrt{s^2} = 0.11460$$

$$t(0.05; 299) \approx 1.96$$

$$t(0.05; 299)\frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{0.11460}{\sqrt{300}} = 0.01297$$

$$(0.589 - 0.013, 0.589 + 0.013) = (0.576, 0.602)$$

Odpowiedź: $\mu \in (0.576, 0.602)$

Wniosek. Przeciętna liczba punktów zdobywana na klasówce jest liczbą z przedziału $(0.576, 0.602)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Przedział ufności dla wariancji

Średnia μ jest nieznana

Poziom ufności: $1-\alpha$

$$\left(\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2};n-1\right)}\,,\quad \frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)}\right)$$

$\chi^2\left(\alpha;n-1\right)$ jest stablicowaną wartością krytyczną rozkładu chi–kwadrat z ν stopniami swobody.

Przedziały jednostronne

$$\left(0,\quad \frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(\alpha;n-1\right)}\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(1-\alpha;n-1\right)},\quad \infty\right)$$

Przykład.

Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować zróżnicowanie rozkładu obserwowanej cechy.

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\mathrm{var}X = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$s^2 = \frac{0.36}{10 - 1} = 0.04, \qquad s = \sqrt{s^2} = 0.2$$

Poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$, czyli $\alpha = 0.05$.

$$\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right) = \chi^2\left(0.025; 9\right) = 19.0228$$

$$\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right) = \chi^2\left(0.975; 9\right) = 2.7004$$

$$\left(\frac{0.36}{19.0228}, \frac{0.36}{2.7004}\right) = (0.019, 0.133)$$

Wniosek. Wariancja cechy jest jakąś liczbą z przedziału $(0.019, 0.133)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Przedział ufności dla odchylenia standardowego

Średnia μ jest nieznana

Poziom ufności: $1-\alpha$

$$\left(\sqrt{\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2(\frac{\alpha}{2};n-1)}},\quad \sqrt{\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}}\right)$$

Przedziały jednostronne

$$\left(0,\sqrt{\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(\alpha;n-1\right)}}\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{\mathrm{var}X}{\chi^2\left(1-\alpha;n-1\right)}},\infty\right)$$

....

Przykład (cd).

Przedział ufności dla odchylenia standardowego:

$$(\sqrt{0.019},\sqrt{0.133})=(0.136,0.365)$$

Przykład.
Oszacować zróżnicowanie ilości punktów uzyskiwanych na klasówce.

$$n = 300 \quad \sum x_i = 176.566 \quad \sum x_i^2 = 107.845302$$

Populacja:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki

Cecha X:
ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Zadanie: oszacować parametr σ

Technika statystyczna:
przedział ufności dla odchylenia standardowego
poziom ufności 0.95

Obliczenia

$$\bar{x} = 0.589 \qquad \mathrm{var}X = 3.92679$$

$$\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right) = \chi^2(0.025; 299) = 348.79420$$

$$\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right) = \chi^2(0.975; 299) = 252.99251$$

$$\left(\sqrt{\frac{3.92679}{348.79420}}, \sqrt{\frac{3.92679}{252.99251}}\right) = (0.10610, 0.12458)$$

Odpowiedź: $\sigma \in (0.10610, 0.12458)$

Wniosek. Odchylenie standardowe liczby punktów zdobywanych na klasówce jest liczbą z przedziału $(0.106, 0.125)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Rozkład dwupunktowy
Estymacja parametru

p — frakcja, wskaźnik struktury

Próba: $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i = 0$ lub $= 1$)

$k = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — ilość jedynek (sukcesów)

Estymator punktowy:

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Przedział ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$

$$\left(p_1\left(1 - \frac{\alpha}{2}; k, n-k\right)\ ,\quad 1 - p_1\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-k, k\right)\right)$$

Jednostronne przedziały ufności

$$\left(p_1\left(1 - \alpha; k, n-k\right), 1\right)$$

$$\left(0, 1 - p_1\left(1 - \alpha; n-k, k\right)\right)$$

Przykład.
Wśród 20 zbadanych detali znaleziono dwa braki. Ocenić na tej podstawie wadliwość produkcji.

Cecha X — jakość detalu (dobry, zły).
Sukces — detal wybrakowany
Pytanie: $p=?$

$$n=20,\ k=2 \Longrightarrow \hat{p}=2/20=0.1$$

Poziom ufności $1-\alpha=0.9$, czyli $\alpha=0.1$

$$p_1\left(1-\frac{\alpha}{2};k,n-k\right)=p_1(0.95;2,18)=0.0123$$

$$p_1\left(1-\frac{\alpha}{2};n-k,k\right)=p_1(0.95;18,2)=0.6830$$

$$(0.0123,1-0.6830)=(0.0123,0.3170)$$

Wniosek. Wadliwość produkcji wyraża się liczbą z przedziału $(1.23\%,31.70\%)$. Zaufanie do wniosku wynosi 90%.

Przybliżony przedział ufności

$$\left(\hat{p} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

u_α jest kwantylem rzędu α rozkładu $N(0,1)$.

. . . .

Przykład. (cd)

$$n = 200,\ k = 20 \Longrightarrow \hat{p} = 20/200 = 0.1$$

Poziom ufności $1 - \alpha = 0.9$, czyli $\alpha = 0.1$

$$u_{1-\alpha/2} = u_{0.95} = 1.6449$$

$$0.1 - 1.6449\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{200}} = 0.0651$$

$$0.1 + 1.6449\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{200}} = 0.1349$$

Wniosek. Wadliwość produkcji wyraża się liczbą z przedziału $(6.51\%, 13.49\%)$. Zaufanie do wniosku wynosi 90%.

Przykład.
Oszacować odsetek ocen dostatecznych otrzymywanych na klasówce.

$$n = 300 \quad k = 88$$

Populacja:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki

Cecha X:
ocena dostateczna z klasówki

Założenie:
cecha X ma rozkład $D(p)$

Zadanie: oszacować parametr p

Technika statystyczna:
przybliżony przedział ufności dla prawdopodobieństwa
poziom ufności 0.95

Obliczenia

$$\widehat{p} = \frac{88}{300} = 0.29$$

$$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$$

$$0.29 - 1.96\sqrt{\frac{0.29(1-0.29)}{300}} = 0.2387$$

$$0.29 + 1.96\sqrt{\frac{0.29(1-0.29)}{300}} = 0.3413$$

Odpowiedź: $p \in (0.2387, 0.3413)$

Wniosek.
Odsetek ocen dostatecznych zdobywanych na klasówce jest liczbą z przedziału $(23.87\%, 34.13\%)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Porównanie dwóch rozkładów normalnych

Założenia:
1. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

Ocena $\mu_1 - \mu_2$ oraz σ_1^2/σ_2^2.

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$; $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

$$\bar{X}_1, \quad \mathrm{var}X_1, \quad s_1^2 = \frac{\mathrm{var}X_1}{n_1 - 1}$$

$$\bar{X}_2, \quad \mathrm{var}X_2, \quad s_2^2 = \frac{\mathrm{var}X_2}{n_2 - 1}$$

Ocena różnicy między średnimi $\mu_1 - \mu_2$

Ocena punktowa: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Przedział ufności (poziom ufności $1-\alpha$)

1. Założenie $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t(\alpha; n_1+n_2-2)s_r,\\ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t(\alpha; n_1+n_2-2)s_r)$$

$$s_e^2 = \frac{\mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}X_2}{n_1+n_2-2}, \quad s_r^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

2. Bez założenia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - V(\alpha; n_1-1, n_2-1, c)s_r,\\ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + V(\alpha; n_1-1, n_2-1, c)s_r)$$

$$s_r^2 = \left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right) \qquad c = \frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$$

$V(\alpha; n_1-1, n_2-1, c)$ — wartość krytyczna testu Behrensa–Fishera

Przykład. Ocenić różnicę między średnimi wynikami klasówki pań i panów.
Panowie:

$$n_1 = 138, \quad \sum x_{1i} = 82.833, \quad \mathrm{var} x_1 = 1.65841$$

Panie:

$$n_2 = 162, \quad \sum x_{2i} = 93.733, \quad \mathrm{var} x_2 = 2.23348$$

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X**:** ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Zadanie: oszacować różnicę $\mu_1 - \mu_2$

Technika statystyczna:
przedział ufności t dla różnicy średnich
poziom ufności 0.95

Obliczenia

$$\bar{x}_1 = 0.60024, \quad \bar{x}_2 = 0.57860,$$

$$s_r^2 = \frac{1.65841 + 2.23348}{138 + 162 - 2}\left(\frac{1}{138} + \frac{1}{162}\right)$$
$$= 0.000175255$$

$$t(0.05; 298) \approx 1.96; \quad t(0.05; 298)s_r = 0.02595$$

$$(0.60024 - 0.57860 \pm 0.00034) = (-0.00431, 0.04759)$$

Odpowiedź: $\mu_1 - \mu_2 \in (-0.00431, 0.04759)$

Wniosek.
Różnica średnich ilości punktów zdobywanych na klasówce przez panie i panów jest liczbą z przedziału $(-0.00431, 0.04759)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje" zero, więc można uznać, że $\mu_1 = \mu_2$.

Ocena ilorazu wariancji σ_1^2/σ_2^2

Ocena punktowa: S_1^2/S_2^2

Przedział ufności (poziom ufności $1-\alpha$)

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F\left(1-\frac{\alpha}{2}; n_1-1, n_2-1\right),\right.$$
$$\left.\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F\left(\frac{\alpha}{2}; n_1-1, n_2-1\right)\right)$$

$F(\alpha; u, v)$ jest stablicowaną wartością krytyczną rozkładu F–Snedecora (Fishera–Snedecora)

$$F(1-\alpha; u, v) = \frac{1}{F(\alpha; v, u)}$$

Przykład. Porównać zróżnicowanie ocen wyników klasówek pań i panów.
Panowie:

$$n_1 = 138, \quad \sum x_{1i} = 82.833, \quad \mathrm{var} x_1 = 1.65841$$

Panie:

$$n_2 = 162, \quad \sum x_{2i} = 93.733, \quad \mathrm{var} x_2 = 2.23348$$

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Zadanie: oszacować iloraz σ_1^2/σ_2^2

Technika statystyczna:
przedział ufności dla ilorazu wariancji
poziom ufności 0.90

Obliczenia

$$s_1^2 = \frac{1.65841}{138-1} = 0.01211, \quad s_2^2 = \frac{2.23348}{162-1} = 0.01387,$$

$$F\,(0.05; 137, 161) = 1.30936$$

$$\begin{aligned} F\,(0.95; 137, 161) &= \frac{1}{F\,(0.05; 161, 137)} \\ &= \frac{1}{1.31386} = 0.76111 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{0.01211}{0.01387} \cdot 0.76111, \frac{0.01211}{0.0138} \cdot 1.30936\right)$$

$$= (0.66415, 1.14255)$$

Odpowiedź: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \in (0.66415, 1.14255)$

Wniosek.
Iloraz wariancji ilości punktów zdobywanych na klasówce jest liczbą z przedziału $(0.66415, 1.14255)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 90%.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje” jedynkę, więc można uznać, że $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Porównanie dwóch rozkładów dwupunktowych

Założenia:
1. $X_1 \sim D(p_1), X_2 \sim D(p_2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

Ocena $p_1 - p_2$.

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ ($X_{ij} = 0$ lub 1)

$$k_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \qquad k_2 = \sum_{i=1}^{n_2} X_{12}$$

$$\hat{p}_1 = k_1/n_1 \quad \hat{p}_2 = k_2/n_2 \quad \hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2)$$

Przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \right.$$
$$\left. \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \right)$$

Przykład.
Oszacować różnicę między „niezaliczalnością” klasówki ze statystyki przez panie i panów. Na podstawie dotychczasowych danych wiadomo, że na 162 pań nie zaliczyło klasówki 46 pań oraz na 138 panów 30 uzyskało ocenę negatywną.

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: uzyskanie z klasówki oceny negatywnej

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $D(p_1)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $D(p_2)$

Zadanie: oszacować różnicę $p_1 - p_2$

Technika statystyczna:
przybliżony przedział ufności dla różnicy prawdopodobieństw
poziom ufności 0.95: $u_{0.975} = 1.96$

Obliczenia

$$n_1 = 162 \quad k_1 = 46 \qquad n_2 = 138 \quad k_2 = 30$$

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{46}{162} = 0.2840 \quad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{30}{138} = 0.2174$$

$$\hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)} = \frac{(46 + 30)}{(162 + 138)} = 0.2533$$

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2533(1 - 0.2533)}{300}} \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{138} \right) = 0.0987$$

$$(0.2840 - 0.2174 - 0.0987, 0.2840 - 0.2174 + 0.0987)$$

$$(-0.0321,\ 0.1653)$$

Wniosek. Różnica prawdopodobieństw jest liczbą z przedziału $(-0.0321,\ 0.1653)$.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje” zero, więc odsetki pań i panów niezaliczających klasówki można traktować jako porównywalne.