Współczynnik b_n jest równy

$$b_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \sqrt{\frac{n}{2}},$$

c_n natomiast

$$c_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, b_n.$$

Współczynniki te oraz współczynnik d_n zależą tylko od liczności próby i dla małych n podano wartości współczynników b_n i d_n w tablicy 22, w której podano również efektywność estymatora Rd_n. Jak pokazuje tablica, efektywność estymatora Rd_n odchylenia standardowego σ maleje, toteż zazwyczaj korzysta się z niego w przypadku próby o liczności n nie przekraczającej 10; w przypadku n większego (rzędu kilkudziesięciu) dzieli się wyniki próby na kilka grup o licznościach około 10, dla każdej z tych j grup oblicza się $\hat{\sigma}_j = R_j d_k$, gdzie k jest licznością danej grupy, a następnie jako estymator $\hat{\sigma}$ populacji normalnej przyjmuje się średnią arytmetyczną estymatorów $\hat{\sigma}_j$. O innych estymatorach parametru σ traktuje praca [33].

2.3. ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

2.3.1. Pojęcie przedziału ufności. Metody estymacji, którymi zajmowaliśmy się dotychczas, pozwalają uzyskiwać oceny punktowe nieznanych parametrów rozkładu, przy czym nie potrafimy dać odpowiedzi na pytanie, jaka jest dokładność uzyskanej oceny.

Innym sposobem estymacji, dającym możliwość oceny tej dokładności, jest *metoda przedziałowa* polegająca na podaniu tzw. *przedziałów ufności dla nieznanych parametrów* (bądź ich funkcji) danego rozkładu.

Przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ nazywamy przedział (θ_1, θ_2) spełniający warunki:

- jego końce $\theta_1 = \theta_1(X_1, \ldots, X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, \ldots, X_n)$ są funkcjami próby losowej i nie zależą od szacowanego parametru θ;
- prawdopodobieństwo pokrycia przez ten przedział nieznanego parametru θ jest równe $1-\alpha$, tzn.

$$P\big(\theta_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1-\alpha. \tag{2.3.1}$$

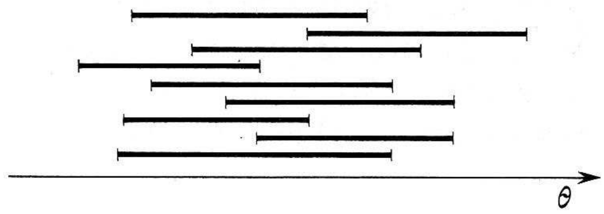
Liczbę $1-\alpha$ nazywamy także *współczynnikiem ufności*. Jak widać z definicji końce przedziału ufności są zmiennymi losowymi. Nieznana wartość parametru θ może więc być pokryta przez ten losowy przedział albo też nie. Jeżeli jednak dla różnych zaobserwowanych próbek losowych $x_1, \ldots, x_n$ znajdziemy wiele realizacji przedziału ufności, to częstość tych, które będą zawierać rzeczywistą wartość parametru θ w dużej liczbie tych realizacji, będzie w przybliżeniu równa $1-\alpha$ (rys. 2.1). Konstrukcję przedziału ufności pokażemy na przykładzie.

Zadanie 2.7. Znaleźć przedział ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ populacji, w której badana cecha ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, w przypadku gdy σ jest znane, na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$.

R o z w i ą z a n i e. Wiemy, że statystyka $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ ma rozkład $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, natomiast statystyka U otrzymana w wyniku standaryzacji

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

ma rozkład N (0, 1). Statystykę tę, ponieważ jej rozkład nie zależy od szacowanego parametru μ, można wykorzystać do konstrukcji szukanego przedziału ufności.

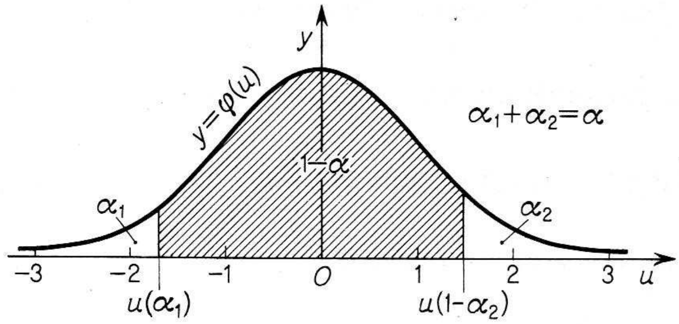


Rys. 2.1. $(1-\alpha)100$-procentowe realizacje przedziału ufności dla parametru θ utworzone dla różnych n-elementowych próbek

Dla danego $\alpha (0 < \alpha < 1)$ możemy znaleźć takie wartości u_1 i u_2, aby

$$P(u_1 < U < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = 1 - \alpha.$$

Wystarczy w tym celu obrać α_1 i α_2 spełniające warunki: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \alpha$ i przyjąć $u_1 = u(\alpha_1)$, $u_2 = u(1-\alpha_2)$, gdzie $u(\alpha_1)$ i $u(1-\alpha_2)$ są kwantylami rozkładu zmiennej U rzędów α_1 i $1-\alpha_2$ odpowiednio (rys. 2.2).



Rys. 2.2.
$$P\left[u(\alpha_1) < (\bar{X} - \mu) : \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < u(1-\alpha_2)\right] = 1 - \alpha$$

Wynika to stąd, że

$$\Phi[u(1-\alpha_2)] - \Phi[u(\alpha_1)] = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha.$$

Wobec powyższego mamy

$$P\left[u(\alpha_1) < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < u(1-\alpha_2)\right] = 1 - \alpha.$$

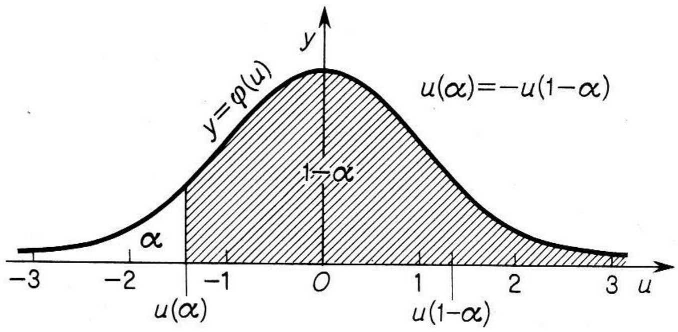
Rozwiązując nierówność znajdującą się wewnątrz nawiasu względem μ, otrzymujemy szukany przedział ufności określony nierównością

$$\bar{X} - u(1-\alpha_2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - u(\alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Widzimy, że nawet przy wykorzystaniu jednej statystyki U do wyznaczenia szukanego przedziału w zależności od sposobu wyboru wartości α_1 i α_2 możemy utworzyć nieskończenie wiele przedziałów ufności. Gdy przyjmiemy $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, wtedy $u(\alpha_1) = u(0) = -\infty$ oraz $u(1-\alpha_2) = u(1-\alpha)$ i uzyskujemy przedział postaci (rys. 2.3)

$$\left(\bar{X} - u(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right),$$

Rys. 2.3. $P\left[(\bar{X}-\mu):\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > u(\alpha)\right] = 1-\alpha$



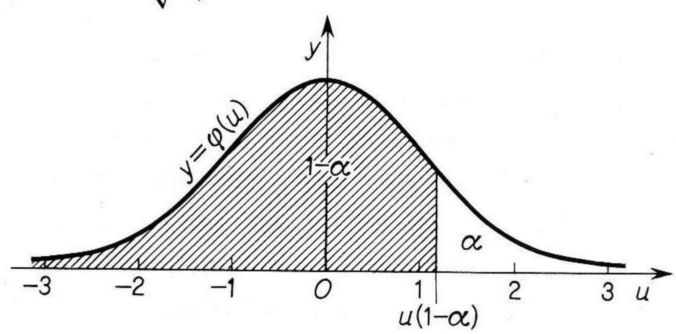
który nazywamy *prawostronnym przedziałem ufności.* Gdy $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, wtedy $u(\alpha_1) = u(\alpha)$, $u(1-\alpha_2) = u(1) = \infty$ i otrzymujemy *lewostronny przedział* postaci

$$\left(-\infty,\ \bar{X} - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Wykorzystując symetrię rozkładu $N(0,1)$, mamy: $u(\alpha) = -u(1-\alpha)$ i przedział ten możemy zapisać w postaci (rys. 2.4)

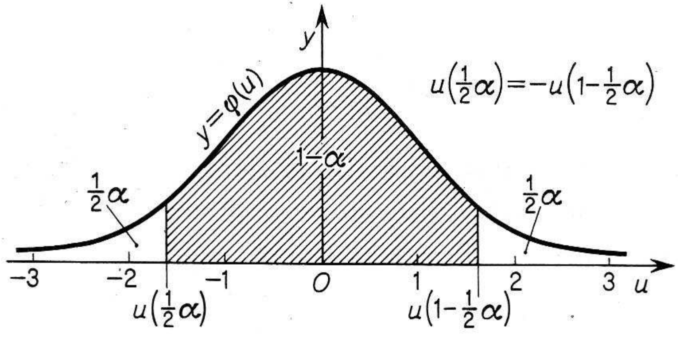
$$\left(-\infty,\ \bar{X} + u(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Rys. 2.4. $P\left[(\bar{X}-\mu):\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < u(1-\alpha)\right] = 1-\alpha$



Praktycznie najczęściej α_1 i α_2 wybieramy tak, aby $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$, otrzymując wówczas przedział

$$\left(\bar{X} - u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} - u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$



Rys. 2.5.

$$P\left[|\bar{X}-\mu|:\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=1-\alpha$$

Ze względu na symetrię rozkładu $N(0,1)$ przedział ten można zapisać w postaci (rys. 2.5)

$$\left(\bar{X}-u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

ponieważ wtedy $-u(\frac{1}{2}\alpha)=u(1-\frac{1}{2}\alpha)$.

W przypadku tym otrzymujemy przedział symetryczny względem $\bar{X}$ o długości $2u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Długość ta nie zależy od wartości x_i próby, lecz jest zależna od:

– obranego współczynnika ufności $1-\alpha$ (im większy współczynnik ufności, tym dłuższy przedział),

– liczności próby n (im większa liczność, tym krótszy przedział).

Przy danym współczynniku ufności i ustalonej liczności próby przedział symetryczny względem $\bar{X}$ jest przedziałem ufności o najkrótszej długości.

Niech $\sigma=2$, na podstawie próbki o liczności $n=16$ wyznaczono np. $\bar{x}=34{,}1$; przyjmijmy $\alpha=0{,}05$. Z tablicy 6 kwantyli rozkładu $N(0,1)$ odczytujemy, że $u(1-\frac{1}{2}\alpha)=$ $=u(0{,}975)=1{,}96$. Realizacją przedziału ufności, dla nieznanej wartości przeciętnej μ uzyskaną dla danej próbki przy poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$, jest $33{,}12<\mu<35{,}08$.

Należy tutaj przestrzec, że błędem jest twierdzić, że

$$P(33{,}12<\mu<35{,}08)=0{,}95.$$

Taki zapis jest błędny, bo wartość przeciętna μ badanej cechy populacji – aczkolwiek nieznana – jest stałą i nierówność $33{,}12<\mu<35{,}08$ albo jest spełniona, jeżeli wartość przeciętna μ zawiera się w tych granicach i wówczas prawdopodobieństwo jej spełnienia wynosi 1, albo sprzeczna i wtedy prawdopodobieństwo jest równe 0.

Gdybyśmy jednak z tej samej populacji pobrali nie jedną lecz wiele próbek 16-elementowych i na podstawie każdej z nich wyznaczyli odpowiadające im realizacje przedziałów ufności, to przeciętnie 95% tych przedziałów pokryłoby stałą, aczkolwiek nieznaną wartość μ (rys. 2.1).

Jaki jest wobec tego sens znalezionego przedziału ufności (realizacji przedziału ufności) na podstawie jednej próbki, jeżeli nie wiemy, czy pokryje ona nieznaną wartość μ, czy też nie?

Otóż kierujemy się tutaj praktyczną zasadą, według której zdarzenie o bardzo małym prawdopodobieństwie w jednym doświadczeniu praktycznie nie zachodzi, tak np. rzucając jeden raz pięcioma monetami nie jest niemożliwe wyrzucenie pięciu orłów, bo prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $(\frac{1}{2})^5 \cong 0{,}03$, jednakże z taką możliwością, przy jednokrotnym rzucie pięciu monetami, nie liczymy się w praktyce. Natomiast w dużej liczbie rzutów po pięć monet wynik pięć orłów będzie się realizował przeciętnie raz na 32 rzuty.

2.3.2. Przedziały ufności dla parametrów rozkładu badanej cechy populacji.

A. Przedziały ufności dla nieznanej wartości przeciętnej.

Model 1. Cecha X populacji generalnej ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanej wartości przeciętnej μ i znanym odchyleniu standardowym σ.

Jest to model, który rozpatrywaliśmy w zadaniu 2.7. Przy danej liczności n próby i danym współczynniku ufności $1-\alpha$ najkrótszym przedziałem ufności dla μ jest przedział

$$\left(\bar{X} - u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.3.2}$$

Model 2. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, przy czym zarówno μ jak i σ nie są znane.

W teorii statystyki dowodzi się ([11]), że statystyka t [1]

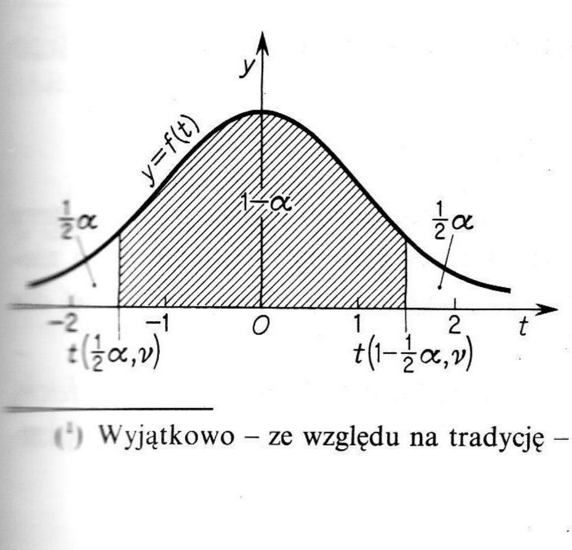
$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}, \tag{2.3.3}$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ma rozkład o gęstości

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\,B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(n-1)\right)}\frac{1}{\left(1+t^2/(n-1)\right)^{n/2}}, \qquad t \in \boldsymbol{R},$$

nazywany *rozkładem Studenta* o $\nu = n-1$ stopniach swobody. Ponieważ rozkład tej statystyki jest niezależny od nieznanych parametrów μ i σ (zależny tylko od liczności próby), statystykę tę można wykorzystać do konstrukcji przedziału ufności dla wartości przeciętnej μ.

Z tablic kwantyli rozkładu t Studenta przy $n-1$ stopniach swobody i przyjętym z góry poziomie ufności $1-\alpha$ (rys. 2.6) znajdujemy kwantyl rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ (tzn. taką wartość



Rys. 2.6. Kwantyle rzędów $\frac{1}{2}\alpha$ i $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu Studenta o ν stopniach swobody

$$t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, \nu) = -t(\tfrac{1}{2}\alpha, \nu)$$

[1] Wyjątkowo – ze względu na tradycję – oznaczona małą literą.

$t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)$ zmiennej losowej t, że jest spełniony warunek $P(t < t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)) = 1-\frac{1}{2}\alpha$ i wówczas

$$1-\alpha = P(|t| < t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\right| < t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\right).$$

Rozwiązując nierówność zawartą w ostatnim nawiasie względem μ, otrzymujemy $(1-\alpha)\,100\%$-owy przedział ufności

$$\bar{X} - t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}}. \qquad (2.3.4)$$

Długość tego przedziału jest równa $2t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$, więc przy danym α i nie zmieniającej się liczności próby nie jest stała (jest zmienną losową), zależy bowiem jeszcze od odchylenia standardowego próby, które na ogół – mimo stałego n – przyjmuje dla różnych próbek różne wartości.

Zadanie 2.8. Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych gotowych elementów konstrukcji budowlanych i otrzymano następujące wyniki (w MPa): 383, 284, 339, 340, 305, 386, 378, 335, 344, 346.

Zakładając, że rozkład wytrzymałości tych elementów jest rozkładem $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach, wyznaczyć na podstawie tej próbki 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ badanej cechy populacji.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i = 344{,}0$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = 968{,}80$, skąd $s = 31{,}13$. Z tablicy kwantyli rozkładu Studenta (tabl. 7) odczytujemy, że $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1) = t(0{,}975, 9) = 2{,}26$. 95%-ową realizacją przedziału ufności dla μ, wyznaczoną na podstawie tej próbki, jest przedział określony podwójną nierównością

$$344 - 2{,}26\cdot\frac{31{,}13}{3} < \mu < 344{,}0 + 2{,}26\cdot\frac{31{,}13}{3},$$

czyli przedział (320,55, 367,45).

Zadanie 2.9. W celu wyznaczenia ładunku elektronu wykonano 26 pomiarów tego ładunku metodą Millikana, otrzymując (w C)

$$\bar{x} = 1{,}574\cdot 10^{-19}, \qquad s = 0{,}043\cdot 10^{-19}.$$

Zakładając, że wartość przeciętna μ_Y błędu Y przyrządu pomiarowego jest równa zeru i błędy pomiarów przy wyznaczaniu ładunku elektronu mają rozkład normalny o nieznanym σ, wyznaczyć na podstawie otrzymanych danych 99%-owy przedział ufności dla prawdziwej wartości wielkości ładunku elektronu.

R o z w i ą z a n i e. Oznaczmy przez a – rzeczywistą wartość ładunku elektronu, a przez Y_i błąd losowy i-tego pomiaru, wtedy i-ty pomiar $X_i = a + Y_i$, a jego wartość przeciętna $\mu_X = a + \mu_Y = a$. W takim razie przedziałem ufności dla μ_X, a tym samym dla a, jest przedział określony warunkiem

$$\bar{X} - t(1 - \tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{X} + t(1 - \tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},$$

co po podstawieniu wartości liczbowych $\bar{x}$ i s oraz $t(1 - \frac{1}{2}\alpha, n-1) = t(0{,}995, 25) = 2{,}79$ (odczytane z tablicy 7) daje realizację

$$1{,}550 \cdot 10^{-19} < a < 1{,}598 \cdot 10^{-19}.$$

M o d e l 3. Cecha X populacji generalnej ma rozkład dowolny o nieznanych: wartości przeciętnej i skończonej wariancji σ^2; próba o liczności $n \geqslant 100$.

Z centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego (cz. I, p. 6.1) wynika, że statystyka $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ ma asymptotyczny rozkład $N(0, 1)$. Dla dużych n można zatem rozkład statystyki U przybliżyć tym rozkładem. Ze względu na dużą liczność próbki nieznaną wartość σ zastępujemy oceną s^* obliczoną z próbki i, postępując jak w modelu 1, wyznaczamy dla danej próbki przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$, określony nierównością

$$\bar{x} - u(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\frac{s^*}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\frac{s^*}{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 2.10. Z populacji włókien bawełny pobrano 300-elementową próbkę włókien i zmierzono ich długości, grupując dane w następujący szereg rozdzielczy

Przedział [mm]	(0, 5,5⟩	(5,5, 10,5⟩	(10,5, 15,5⟩	(15,5, 20,5⟩
Środek przedziału $\bar{x}_i$	2,75	7,75	12,75	17,75
Liczność n_i	2	5	11	19

Przedział [mm]	(20,5, 25,5⟩	(25,5, 30,5⟩	(30,5, 35,5⟩	(35,5, 40,5⟩
Środek przedziału $\bar{x}_i$	22,75	27,75	32,75	37,75
Liczność n_i	41	117	87	18

Znaleźć 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej długości włókna.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{8} x_i n_i = 27{,}43$, $s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 n_i = 51{,}598$, skąd $s^* = 7{,}18$. Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0, 1)$ odczytujemy, że $u(1 - \frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$. Zatem 95%-owa realizacja przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej

μ uzyskana dla tej próbki losowej jest określona nierównością

$$27{,}4 - 1{,}96 \cdot \frac{7{,}18}{\sqrt{300}} < \mu < 27{,}4 + 1{,}96 \cdot \frac{7{,}18}{\sqrt{300}},$$

co po wykonaniu rachunków daje rezultat $26{,}59 < \mu < 28{,}21$.

B. Przedziały ufności dla wariancji i odchylenia standardowego.

Model 1. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ. Próba o liczności $n \leqslant 50$.

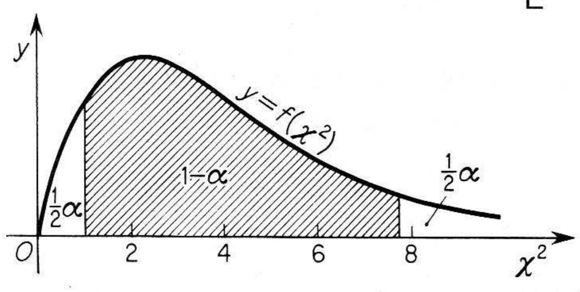
Konstrukcję przedziału oprzemy na statystyce

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_1^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \tag{2.3.5}$$

która ma rozkład chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody (tabl. 27). Rozkład ten dalej będziemy oznaczali $\chi^2(n-1)$. Niech jak zwykle $\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)$, $\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)$ oznaczają kwantyle rozkładu $\chi^2(n-1)$. Wtedy (rys. 2.7)

$$P[\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) < \chi^2 < \chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)] =$$

$$= P\left[\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\right] = 1-\alpha.$$



Rys. 2.7. Kwantyle rzędów $\frac{1}{2}\alpha$ i $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu χ^2 o $n-1$ stopniach swobody

Rozwiązując następnie nierówność zawartą w ostatnim nawiasie względem σ^2, otrzymujemy $(1-\alpha)100\%$-owy przedział ufności dla σ^2 określony warunkiem

$$\frac{nS^2}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}, \tag{2.3.6}$$

dla odchylenia standardowego σ natomiast

$$\sqrt{\frac{n}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\,S < \sigma < \sqrt{\frac{n}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\,S. \tag{2.3.7}$$

Nierówności te, wykorzystując nieobciążony estymator wariancji S^{*2}

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2,$$

można również zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\, n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)} \tag{2.3.6'}$$

oraz

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\, n-1)}}\, S^* < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\, S^*. \tag{2.3.7'}$$

Dla wygodnego wyznaczania przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ w tablicy 20 podano dla poziomów ufności $1-\alpha = 0{,}99$, $0{,}98$, $0{,}95$, $0{,}90$ wartości współczynników

$$g_1(\alpha, n-1) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)}} \quad \text{oraz} \quad g_2(\alpha, n-1) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha,\, n-1)}}$$

i wtedy przedział ufności dla σ można zapisać za pomocą warunku

$$g_1(\alpha, n-1)\, S^* < \sigma < g_2(\alpha, n-1)\, S^*. \tag{2.3.8}$$

ZADANIE 2.11. Wykonano pomiary liczby skrętów dla losowo wybranych odcinków przędzy o długości 1 m, uzyskując wyniki: 87, 102, 119, 81, 97, 93, 100, 114, 99, 100, 113, 93, 95, 85, 123, 99. Zakładając, że liczba skrętów odcinków przędzy ma rozkład normalny, znaleźć 90%-owe realizacje przedziałów ufności dla wariancji i odchylenia standardowego liczby skrętów całej partii przędzy.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy $\bar{x} = 100$, $s^2 = \frac{1}{16}\sum_{1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 = 134{,}2$, następnie, wykorzystując tablicę 8 kwantyli rozkładu χ^2 przy 15 stopniach swobody, odczytujemy

$$\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) = \chi^2(0{,}05, 15) = 7{,}26,$$
$$\chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) = \chi^2(0{,}95, 15) = 25{,}00,$$

90%-ową realizacją przedziału ufności dla wariancji wyznaczoną dla danej próbki jest zatem przedział określony nierównością

$$\frac{16\cdot 134{,}2}{25{,}00} < \sigma^2 < \frac{16\cdot 134{,}2}{7{,}26}.$$

Stąd

$$85{,}97 < \sigma^2 < 296{,}04,$$

a dla odchylenia standardowego σ otrzymamy

$$9{,}3 < \sigma < 17{,}2.$$

Wynik ten można także uzyskać prościej przy wykorzystaniu tablicy 20, a mianowicie: odczytujemy z tej tablicy przy $n-1 = 15$ stopniach swobody i poziomie $1-\alpha = 0{,}90$, że

$$g_1(\alpha, n-1) = g_1(0{,}10,\ 15) = 0{,}775, \qquad g_2(0{,}10,\ 15) = 1{,}44.$$

Obliczamy $s^* = \sqrt{143{,}28} = 11{,}97$ i podstawiając do wzoru (2.3.8) uzyskujemy identyczny rezultat jak poprzednio.

M o d e l 2. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ. Próba o liczności $n \geqslant 50$.

W przypadku tego modelu można wykorzystać fakt, że statystyka $\sqrt{2\chi^2} = \sqrt{2\dfrac{nS^2}{\sigma^2}} = \dfrac{S}{\sigma}\sqrt{2n}$ ma w przybliżeniu ([1]) rozkład $N(\sqrt{2n-3}, 1)$. Zatem

$$P\left(\sqrt{2n-3} - u(1-\tfrac{1}{2}\alpha) < \frac{S}{\sigma}\sqrt{2n} < \sqrt{2n-3} + u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0, 1)$. Rozwiązując nierówność względem σ, otrzymujemy $(1-\alpha)\,100\%$-owy przedział ufności dla σ określony nierównością

$$\frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3} + u(1-\frac{1}{2}\alpha)} < \sigma < \frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3} - u(1-\frac{1}{2}\alpha)}. \tag{2.3.9}$$

Zadanie 2.12. W celu sprawdzenia dokładności skrawania za pomocą pewnego urządzenia, dokonano pomiarów wykonanych 50 części i otrzymano $s^2 = 0{,}00068$. Zakładając, że rozkład błędów wymiarów części jest normalny o nieznanym σ, na poziomie ufności 0,95 wyznaczyć na podstawie danych realizację przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$, zatem dla danych zadania z (2.3.9) otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{0{,}00068}\sqrt{100}}{\sqrt{97}+1{,}96} < \sigma < \frac{\sqrt{0{,}00068}\sqrt{100}}{\sqrt{97}-1{,}96}.$$

Tak więc 95%-ową realizacją przedziału ufności dla σ jest (0,0221, 0,0330).

C. Przedział ufności dla wskaźnika struktury populacji. Ocenę wskaźnika struktury (p. 2.2.3) wyznacza się w zależności od liczby K elementów wyróżnionych w losowej próbie prostej o liczności n. Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia takich dwóch funkcji $f_1(K, n, \alpha)$ i $f_2(K, n, \alpha)$, aby

$$P\left(f_1(K, n, \alpha) < p < f_2(K, n, \alpha)\right) = 1-\alpha. \tag{2.3.10}$$

Stosowanie efektywnych wzorów na funkcje f_1 i f_2 jest dość kłopotliwe, dlatego też stablicowano dla małych n wartości tych funkcji w zależności od liczb k i $n-k$ przy poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ (tabl. 21).

([1]) Można tutaj uzyskać dokładniejsze przybliżenie, wykorzystując fakt, że dla dużych n statystyka $\sqrt[3]{\dfrac{\chi^2}{n-1}}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(1 - \dfrac{2}{9(n-1)}, \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right)$.

M o d e l 1. Cecha populacji generalnej ma rozkład dwupunktowy z parametrem p (tzn. frakcja wyróżnionych elementów populacji jest równa p). Próbka o niewielkiej liczności n.

Niech k oznacza liczbę wyróżnionych elementów próbki o liczności n. Z tablicy 21 odczytujemy przy 95%-owym poziomie ufności wartości $f_1(k, n, \alpha)$ i $f_2(k, n, \alpha)$ spełniające (2.3.10), otrzymując realizację przedziału ufności dla p postaci

$$\big(f_1(k, n, \alpha), f_2(k, n, \alpha)\big).$$

Zadanie 2.13. Z partii towaru sztukowego pobrano losowo 20 sztuk i wśród nich zaobserwowano 2 sztuki wadliwe. Podać 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji sztuk wadliwych całej partii towaru.

R o z w i ą z a n i e. Z tablicy 21 przy $k=2$, $n-k=18$ i poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ odczytujemy, że $f_1=0{,}012$, $f_2=0{,}317$. Zatem 95%-ową realizacją przedziału ufności frakcji sztuk wadliwych jest przedział określony nierównością $0{,}012<p<0{,}317$.

M o d e l 2. Cecha populacji generalnej ma rozkład dwupunktowy z parametrem p. Próba o liczności $n \geqslant 100$.

Wykorzystujemy tu fakt, że statystyka $\hat{p}=\dfrac{K}{n}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$. Po standaryzacji $\hat{p}$ otrzymujemy statystykę

$$U=\left(\frac{K}{n}-p\right):\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

która dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$. W takim razie

$$P\big(|U|<u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\big)=P\left(\left|\frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|<u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\right)=1-\alpha$$

gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0, 1)$. Rozwiązując ostatnią z wypisanych nierówności względem p, uzyskujemy szukany przedział ufności

$$A(B-C)<p<A(B+C), \tag{2.3.11}$$

gdzie

$$A=\frac{n}{n+u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}, \quad B=\frac{K}{n}+\frac{u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}{2n},$$

$$C=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{K(n-K)}{n}+\frac{u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}{4}}\,u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{2.3.12}$$

Zadanie 2.14. Spośród 120 wylosowanych pracowników pewnego zakładu 17 nie wykonywało normy wydajności pracy. Wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji p pracowników tego zakładu, którzy nie wykonują normy.

R o z w i ą z a n i e. Mamy tutaj $n = 120$, $k = 17$. Z tablicy rozkładu normalnego odczytujemy kwantyl $u(1 - \frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$. Na podstawie wzorów (2.3.12) mamy

$$A = 0{,}969, \quad B = 0{,}158, \quad C = 0{,}064.$$

Podstawiając do (2.3.11), otrzymujemy 95%-ową realizację przedziału ufności dla p określoną nierównością $0{,}090 < p < 0{,}215$.

2.3.3. Uogólnienie pojęcia przedziału ufności w przypadku dwóch paremetrów. Obszar ufności. Niech $I(X_1, \ldots, X_n)$ będzie dwuwymiarowym zbiorem (zbiorem płaskim) zależnym od próby, tak dobranym, aby prawdopodobieństwo, że pokryje on parę parametrów (θ_1, θ_2), tzn. punkt o współrzędnych θ_1, θ_2, było równe $1 - \alpha$, to jest

$$P\big((\theta_1, \theta_2) \in I\big) = 1 - \alpha.$$

Każdy zbiór I spełniający powyższy warunek nazywamy $(1 - \alpha)\,100\%$-owym obszarem ufności dla pary parametrów (θ_1, θ_2). Ze względu na to, że zbiór I można wyznaczyć na nieskończenie wiele sposobów, należy dokonać wyboru najodpowiedniejszego w pewnym – zależnym od zagadnienia – sensie.

Rozpatrzmy teraz dokładniej sytuację w przypadku, gdy wyznaczamy łączny dwuwymiarowy zbiór ufności dla wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2, w przypadku gdy badana *cecha ma rozkład* $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ.

Ponieważ statystyki $G_1 = \dfrac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$ i $G_2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ są niezależne ([4]) i mają rozkład χ^2 odpowiednio o jednym oraz $n - 1$ stopniach swobody, możemy je wykorzystać do budowy obszaru ufności. Możemy np. wyznaczyć takie wartości a, b, c, aby

$$P(G_1 < a,\ b < G_2 < c) = P(G_1 < a)\,P(b < G_2 < c) = 1 - \alpha.$$

Dla danego poziomu ufności $1 - \alpha$ można oczywiście wartości a, b, c wybrać na wiele sposobów. Najczęściej jednak wybieramy je tak, aby $P(G_1 < a) = \sqrt{1 - \alpha} \cong 1 - \frac{1}{2}\alpha$ oraz $P(b < G_2 < c) = \sqrt{1 - \alpha}$, ale tak, aby $P(G_2 > c) = P(G_2 < b)$.

Wystarczy wtedy przyjąć

$$a = \chi^2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha,\ 1), \qquad b = \chi^2(\tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1), \qquad c = \chi^2(1 - \tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1).$$

Rozwiązując następnie nierówności

$$G_1 = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha,\ 1),$$

$$\chi^2(\tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2(1 - \tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1)$$

względem μ i σ, otrzymamy dwuwymiarowy obszar ufności dla tych parametrów, określony