Wykład X

Zadanie 1.

Niech X_1, ... X_{20} będą zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$, oba parametry są nieznane. Niech przedział (2,06; 3,94) będzie przedziałem ufności dla parametru m wyznaczonym na poziomie ufności 0,9. Wyznaczyć końce przedziału ufności na poziomie ufności 0,95.

1. $X_1, \ldots X_{20} \sim N(m,\sigma)$ stąd $n=20$

dla $\alpha=0,1$ $m \in (2,06; 3,94)$

dla $\alpha=0,05 \rightarrow ?$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Po standaryzacji:

$$Z = \frac{\overline{X}-m}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \sim N(0,1)$$

po podstawieniu za σ estymatora S otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie t-Studenta z $(n-1)=19$ stopniami swobody:
tj $k=19$

$$T = \frac{\overline{X}-m}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} \sim t_{19}$$

przedział ufności dla m:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},k}\frac{s}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},k}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

podstawiając $\alpha=0,1$ i znany przedział mamy:

$$\overline{x} - t_{0,95;19}\frac{s}{\sqrt{20}} = 2,06$$

$$\overline{x} + t_{0,95;19}\frac{s}{\sqrt{20}} = 3,94$$

Szukamy $\overline{x} - t_{0,975;19}\frac{s}{\sqrt{20}}$ i $\overline{x} + t_{0,975;19}\frac{s}{\sqrt{20}}$

Po odczytaniu z tablicy rozkładu t-Studenta $t_{0,95;19} = 1,729$

$t_{0,975;19} = 2,093$

stąd $\begin{cases} 2{,}06 = \overline{x} - 1{,}729 \frac{s}{\sqrt{20}} \\ 3{,}94 = \overline{x} + 1{,}729 \frac{s}{\sqrt{20}} \end{cases}$

$$\overline{x} = 2{,}06 + \frac{1{,}729\, s}{\sqrt{20}}$$

$$3{,}94 = 2{,}06 + \frac{1{,}729\, s}{\sqrt{20}} + \frac{1{,}729\, s}{\sqrt{20}}$$

$$1{,}88 = 2 \cdot \frac{1{,}729\, s}{\sqrt{20}}$$

$$1{,}88 \cdot \frac{\sqrt{20}}{2} = 1{,}729\, s$$

$$s = \frac{0{,}94\sqrt{20}}{1{,}729} \approx 2{,}43$$

$$\overline{x} = 2{,}06 + \frac{1{,}729\, s}{\sqrt{20}} = 2{,}06 + \frac{\cancel{1{,}729}}{\sqrt{20}} \cdot \frac{0{,}94\sqrt{20}}{\cancel{1{,}729}} = 2{,}06 + 0{,}94 = 3$$

Ustalam przedział ufności dla $\alpha = 0{,}05$:

$$\left[3 - \frac{2{,}093 \cdot 2{,}43}{\sqrt{20}} \ ; \ 3 + \frac{2{,}093 \cdot 2{,}43}{\sqrt{20}}\right] \approx$$

$$\approx [1{,}86 \ ; \ 4{,}14]$$

Odp. Przedział ufności na poziomie ufności 0,95 to $(1{,}86 ; 4{,}14)$.

Zadanie 2.

Analityk chce oszacować procent rynku komputerów klasy PC opanowany przez pewnego producenta. Próba losowa złożona z 590 spółek używających mikrokomputery dała rezultat, że 500 spółek miało komputery tego producenta. Podać 99% przedział ufności dla procentu rynku opanowanego przez tego producenta. Jak zmieni się długość przedziału ufności, gdy poziom ufności zmaleje?

Z. $n = 590$

$\alpha = 0{,}01 \qquad 1-\alpha = 0{,}99 \qquad 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}995$

$X_1, \dots X_{590}$ – rozkład Bernoulliego

500 sukcesów

estymuje wartość p

$\hat{p} \cdot n = 500$

$\hat{p} \cdot 590 = 500 \Rightarrow \hat{p} = \frac{50}{59} \approx 0{,}85$

rozkład $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ jest bliski $N(0,1)$, gdyż $n\hat{p} = 500 \geqslant 5$, $n(1-\hat{p}) = 90 \geqslant 5$

z tablic $z_{0{,}995} = 2{,}58$

Przedział ufności:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \,;\, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}85 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{590}} \,;\, 0{,}85 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{590}}\right] \approx$$

$$\approx [0{,}85 - 0{,}04 \,;\, 0{,}85 + 0{,}04] = [0{,}81 \,;\, 0{,}89]$$

Odp. 99% przedział ufności dla tej próby to $[0{,}81; 0{,}89]$.

Dla mniejszego poziomu ufności przedział ufności będzie mniejszy. Dzieje się tak, gdyż długość przedziału to $2z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, a dla malejącego poziomu ufności parametr $z_{1-\alpha}$ maleje (na podstawie tablic), więc przedział również maleje.

Zadanie 3.

Firma telekomunikacyjna chce oszacować średnią długość rozmów zamiejscowych w soboty i niedziele na podstawie 20 elementowej próby losowej, dla której średnia wynosi 14,5. Zakładając, że czas rozmowy ma rozkład normalny o odchyleniu 5,6 wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej czasu rozmowy na poziomie ufności 95%.

3. $n=20$

$\bar{X}=14,5$

$X_1, \dots X_{20} \sim N(\mu; 5,6)$

$\alpha=0,05 \quad 1-\alpha=0,95 \to 95\% \quad 1-\frac{\alpha}{2}=0,975$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{5,6}{\sqrt{n}}\right)=N(\mu; 1,25)$$

Po standaryzacji

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{1,25} \sim N(0,1)$$

z tablic $z_{0,975}=1,96$

Przedziałem ufności będzie

$$\left[\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[14,5-z_{0,975}\cdot 1,25; 14,5+z_{0,975}\cdot 1,25\right]=$$

$$=\left[14,5-1,96\cdot 1,25; 14,5+1,96\cdot 1,25\right]=\left[12,05; 16,95\right].$$

Odp. Przedział ufności dla wartości oczekiwanej przy poziomie 95% to $[12,05; 16,95]$.

Zadanie 4.

W 144 wylosowanych zakładach pewnej gałęzi przemysłowej zbadano koszty materiałowe przy produkcji pewnego wyrobu i otrzymano średnią 540 zł i odchylenie 150 zł.. Zakładamy, że koszty te mają rozkład normalny. Na poziomie ufności 90% wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tych kosztów.

4. $n=144$

$X_1, \dots X_{144} \sim N(\mu, \sigma)$

$1-\alpha = 0{,}9 \to 90\%$ $\quad \alpha = 0{,}1 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95$

$\bar{X} = 540$

$S = 150$

Standaryzacja:

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$ po podstawieniu pod σ S otrzymujemy zmienną losową

$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$ – rozkład t-Studenta ($144-1=143=k$ stopni swobody)

$T \sim t_{143}$

Przedział ufności:

$\left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};k}\frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};k}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$k = 143 \geq 30$ rozkład pokrywa się z normalnym.

z tablic $t_{0,95;143} = 1{,}66$.

stąd $\left[\bar{x} - t_{0,95;143}\frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{0,95;143}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[540 - 1{,}66 \cdot \frac{150}{\sqrt{144}} ; 540 + 1{,}66 \cdot \frac{150}{12}\right] =$

$= [540 - 20{,}75 ; 540 + 20{,}75] = [519{,}25 ; 560{,}75]$

Odp. Na poziomie ufności 90% przedział ufności to $[519{,}25 ; 560{,}75]$.

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736