Wykład VII

Zadanie 1.

Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej (X,Y) określona jest tabelą

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.3
1	C	0.2	C
3	0.1	C	0.2

a) Oblicz C, P(X<3| Y<2).

1.a) $C=?$

$P(X<3|Y<2)=?$

Zmienna losowa dyskretna dwuwymiarowa

Na podstawie własności funkcji prawdopodobieństwa f i jej związku z dystrybuantą:

$\sum_x \sum_y f(x,y)=1$ - sumowanie po wszystkich możliwych parach

$\sum_x \sum_y f(x,y) = f(-1,0)+f(-1,1)+f(-1,2)+f(1,0)+f(1,1)+f(1,2)+f(3,0)+f(3,1)+f(3,2)=$

| po podstawieniu wartości z tabeli | $=0{,}1+0{,}1+0{,}3+C+0{,}2+C+0{,}1+C+0{,}2=3C+1$

$3C+1=1 \quad |-1$

$3C=0 \quad |:3$

$\boxed{C=0}$

Na podstawie definicji warunkowej funkcji prawdopodobieństwa:

$$P(X<3|Y<2)=\frac{P(X<3,Y<2)}{P(Y<2)}$$

$P(X<3,Y<2)=f(-1,0)+f(-1,1)+f(1,0)+f(1,1)=0{,}1+0{,}1+C+0{,}2=$

$=0{,}4+C=0{,}4+0=0{,}4$

Korzystając z def. prawdop. brzegowego

$P(Y<2)=\sum_x \left(f(x,0)+f(x,1)\right) = f(-1,0)+f(-1,1)+f(1,0)+f(1,1)+f(3,0)+f(3,1)=$

$=0{,}2+0{,}3=0{,}5$

$P(X<3|Y<2)=\frac{0{,}4}{0{,}5}=\frac{4}{5}=\boxed{0{,}8}$

Odp. $C=0$, $P(X<3|Y<2)=0{,}8$

b) Czy zmienne X i Y są niezależne?

b) z definicji niezależności pary zmiennych losowych:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

rozkłady brzegowe zmiennych X i Y:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) \qquad f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

$f_X(-1) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5$

$f_X(1) = 0{,}2$

$f_X(3) = 0{,}3$

$f_Y(0) = 0{,}1 + c + 0{,}1 = 0{,}2 + 0 = 0{,}2$

$f_Y(1) = 0{,}3$

$f_Y(2) = 0{,}5$

Sprawdzam warunek konieczny niezależności:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1,0) = 0{,}1 \\ f_X(-1) \cdot f_Y(0) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \end{array}\right\} f(-1,0) = f_X(-1) f_Y(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1,1) = 0{,}1 \\ f_X(-1) \cdot f_Y(1) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15 \end{array}\right\} 0{,}1 \neq 0{,}15 \rightarrow f(-1,1) \neq f_X(-1) f_Y(1)$$

Zmienne nie są niezależne.

$\boxed{\text{Odp. Zmienne losowe } X \text{ i } Y \text{ nie są niezależne.}}$

Zadanie 2.

Dwuwymiarowa zmienna losowa ciągła (X,Y) ma funkcję gęstości łącznej postaci

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx^2 y & \text{gdy } -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2, \\ 0 & \textit{przeciwnie} \end{cases}$$

Wyznacz C oraz wartość dystrybuanty F(2 , 1).

2. $C = ?$

$F(2,1) = ?$

na podstawie funkcji gęstości łącznej:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} Cx^2 y\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2} Cx^2 y\,dy = 1$$

$$\int_{-1}^{1} C\,dx \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_0^2 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} 2Cx^2\,dx = 1$$

$$2C\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 1$$

$$2C\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$2C\cdot\frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{4}{3}C = 1 \quad /\cdot\frac{3}{4}$$

$$\boxed{C = \frac{3}{4}}$$

$$F(2,1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{na podstawie funkcji gęstości łącznej:} \\ P((X,Y)\in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \ \text{ dla } A = (-\infty; x\rangle \times (-\infty; y\rangle,\ x=2, y=1 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = Cx^2y \text{ dla } x\in\langle -1;1\rangle,\ y\in\langle 0;2\rangle \\ f(x,y)=0 \text{ dla pozostałych, stąd granice całkowania} \\ \text{można zawęzić do } \langle -1;1\rangle \text{ dla } x \text{ oraz } \langle 0;2\rangle \text{ dla } y \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} Cx^2 y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{3}{4}x^2 y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} \frac{3}{4}x^2 y\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\cdot\frac{3}{4}\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^1 = \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}x^2\,dx = \frac{3}{8}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{4}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Odp. } C = \frac{3}{4},\ F(2,1) = \frac{1}{4}}$$

Zadanie 3. (za 2 pkt)

Dwuwymiarowa zmienna losowa ciągła (X,Y) ma funkcję gęstości łącznej postaci

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx^2 & \text{gdy } 0 \le y \le 2x \le 2, \\ 0 & \textit{przeciwnie} \end{cases}$$

Oblicz C. Czy zmienne X i Y są niezależne? Wyznacz gęstość warunkową $f_{X|Y}(x|y)$.

3. $C=?$

$f_{X|Y}(x|y)=?$

X,Y - niezależne?

$0 \le y \le 2x \le 2$, stąd

$0 \le y \le 2x$ oraz $0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x \le 1$

Na podstawie funkcji gęstości łącznej:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Przedziały całkowania z niezerową wartością gęstości to $0 \le y \le 2x$ dla y oraz $0 \le x \le 1$ dla x (zewnętrzna całka musi być stała), stąd:

$$\int_0^1\int_0^{2x} Cx^2\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1 C\,dx \int_0^{2x} x^2\,dy = 1$$

$$C\int_0^1 dx \cdot \left[x^2 y\right]_0^{2x} = 1$$

$$C\int_0^1 2x^3\,dx = 1$$

$$C\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$C \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad / \cdot 2$$

$$C = 2$$

Z definicji warunkowej funkcji prawdopodobieństwa:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Na podstawie rozkładu brzegowego zmiennej losowej ciągłej:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

stosując granice całkowania z przedziału $0{,}5y \leq x \leq 1$ otrzymujemy:

$$f_Y(y) = \int_{0{,}5y}^{1} 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_{0{,}5y}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2\cdot\frac{1}{8}y^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{y^3}{12} = \frac{8-y^3}{12}$$ dla $y \in \langle 0;2x\rangle$ przy x=[0,5y;1], tj. **y=[0;2]**

0 w przeciwnym wypadku

po podstawieniu $f_Y(y)$ oraz $f(x,y)$ do wzoru na $f_{X|Y}(x|y)$ otrzymuję:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2x^2\cdot 12}{8-y^3} = \frac{24x^2}{8-y^3}$$ dla $x \in \langle 0{,}5y;1\rangle$ przy y=[0;2x], tj. **x=[0;1]**

0 w przeciwnym wypadku

Sprawdzam niezależność X i Y z warunku (definicji) $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int_0^{2x} f(x,y)dy = \int_0^{2x} 2x^2dy = 2x^2y\Big|_0^{2x} = 2x^2(2x-0) = 4x^3$$ dla $x \in \langle 0{,}5y;1\rangle$ przy y=[0;2x], tj. **x=[0;1]**

0 w przeciwnym wypadku

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$2x^2 = 4x^3 \cdot \frac{24x^2}{8-y^3}$

$L \neq P \rightarrow$ zmienne nie są niezależne

Odp. $c=2$, $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{24x^2}{8-y^3} & \text{dla } x \in \langle 0{,}5y;1\rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$ przy y=[0;2x], tj. **x=[0;1]**

Zmienne X i Y nie są niezależne.

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736