1. Pan X idzie do kasyna i chce zagrać na jednym z 3 automatów. Szansa wygrania w automacie pierwszym wynosi jak 1:3, w drugim 1:4, a w trzecim 1:5. Wybór automatu uzależnia od ilości kierów wylosowanych spośród 3 kart z talii 52 kart. Jeśli wylosuje większość kierów to wybiera automat 1, jeśli 1 kier, to automat 2 , a jeśli nie będzie kiera to automat 3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X przegra.

1. A_1 - prawdopodobieństwo wygranej w automacie I $= P(A_1) = \frac{1}{3}$

A_2 - prawdopodobieństwo wygranej w automacie II $= P(A_2) = \frac{1}{4}$

A_3 - prawdopodobieństwo wygranej w automacie III $= P(A_3) = \frac{1}{5}$

B_1 - zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu co najmniej 2 kierów w 3 wyciągniętych kartach z talii 52 kart.

B_2 - zdarzenie polegające na wylosowaniu 1 kiera w sytuacji j.w.

B_3 - -//- -//- -//- -//- 0 kierów -//-

$$P(B_3) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{703}{1700}$$

$$P(B_2) = \frac{\binom{39}{2}\cdot\binom{13}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{741}{1700}$$

$$P(B_1) = 1 - \underbrace{\left(P(B_2) + P(B_3)\right)}_{\text{prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego}} = 1 - \frac{1444}{1700} = \frac{256}{1700}$$

prawdopodobieństwo przegranej = na podst. tw. o prawdop. przeciwnym 1 - prawdop. wygranej

$$P(A_1') = \frac{2}{3} = P(A|B_1)$$

$$P(A_2') = \frac{3}{4} = P(A|B_2)$$

$$P(A_3') = \frac{4}{5} = P(A|B_3)$$

$P(A)$ - prawdopodobieństwo przegranej

z twierdzenia o prawdop. całkowitym:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i) = P(A_1')\cdot P(B_1) + P(A_2')\cdot P(B_2) + P(A_3')\cdot P(B_3) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{256}{1700} + \frac{3}{4}\cdot\frac{741}{1700} + \frac{4}{5}\cdot\frac{703}{1700} = \frac{128}{1275} + \frac{2223}{6800} + \frac{703}{2125} =$$

$$= \frac{77329}{102000} \approx 0{,}758$$

$\boxed{\text{Odp. Prawdopodobieństwo przegranej to około } 0{,}758.}$

2. Mamy 3 urny U1, U2, U3. Urna U1 zawiera 4 kule czerwone i 3 zielone. W urnach U2, U3 znajdują się odpowiednio 4 kule białe, 6 czarnych oraz 6 białych i 2 czarne. Z urny U1 losujemy dwie kule. Jeżeli obie kule są czerwone, to losujemy jedną kulę z urny U2, w przeciwnym przypadku losujemy jedną kulę z urny U3. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czerwonych z urny U1, jeśli wiadomo, ze wylosowano kule czarną z którejś z pozostałych urn.

2. U_1: 4x czer, 3x ziel

U_2: 4x biała, 6x czarna

U_3: 6x biała, 2x czarna

prawdop. wylosowania 2óch czerw. kul z U_1 pod warunkiem wylosowania czarnej z U_2 lub U_3

Etapy losowania:

losowanie 2 kul z U_1

2 czerwone?

NIE → losowanie 1 kuli z U_3

TAK → losowanie 1 kuli z U_2

szansa na wylosowanie kuli czarnej z $U_3 \to \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

— || — — || — z $U_2 \to \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

B_1 – wylosowanie dwóch czerwonych kul z U_1

B_2 – niewylosowanie dwóch czerwonych kul z U_1

$B_2 = B_1'$

$$P(B_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(B_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{na mocy tw.} \\ \text{o prawdopodobieństwie} \\ \text{przeciwnym} \end{array} \right\} = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

Na mocy twierdzenia Bayesa:

$$P(B_m|A) = \frac{P(A|B_m)\,P(B_m)}{\sum_{j=1}^{2} P(A|B_j)\,P(B_j)}$$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu czarnej kuli

$$P(A|B_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(A|B_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,P(B_1)}{P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{6}^3}{7}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{15}}{\frac{3}{15} + \frac{3}{14}} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{15}_{\cancel{5}_1}} \cdot \frac{\cancel{70}^{14}}{29} = \frac{14}{29} \approx 0{,}483$$

Odp. Prawdopodobieństwo wylosowania 2 czerwonych kul jeśli z U_2 lub U_3 wylosowano czarną to ok. 0,483

3. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry. Każdemu z rzutów przypisujemy sumę liczby oczek wyrzuconej na pierwszej i drugiej kostce. Podaj rozkład zmiennej losowej.

3.

zmienna losowa X

$S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ $\quad X(s)=s \quad s \in S$

rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej = ?

częstości występowania:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$6^2 \to 36$ możliwości

Wyznaczam dystrybuantę $F(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$

$\to x < 2 \quad \{X \le x\} = \emptyset$, stąd $F(x) = P(\emptyset) = 0$

$\to 2 \le x < 3 \quad \{X \le x\} = \{X = 2\}$, stąd $F(x) = P(2) = \frac{1}{36}$

$\to 3 \le x < 4 \quad \{X \le x\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$, stąd $F(x) = P(2) + P(3) = \frac{3}{36}$

$\vdots$

$\to x \geq 12 \quad \{X \le x\} = \bigcup_{i=2}^{12} \{X = i\} = S$, stąd $F(x) = P(S) = 1$

zatem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{dla } x \in \langle 2;3) \\ \frac{3}{36} & \text{dla } x \in \langle 3;4) \\ \frac{6}{36} & \text{dla } x \in \langle 4;5) \\ \frac{10}{36} & \text{dla } x \in \langle 5;6) \\ \frac{15}{36} & \text{dla } x \in \langle 6;7) \\ \frac{21}{36} & \text{dla } x \in \langle 7;8) \\ \frac{26}{36} & \text{dla } x \in \langle 8;9) \\ \frac{30}{36} & \text{dla } x \in \langle 9;10) \\ \frac{33}{36} & \text{dla } x \in \langle 10;11) \\ \frac{35}{36} & \text{dla } x \in \langle 11;12) \\ 1 & \text{dla } x \geq 12 \end{cases}$$

4. Zmienna losowa X ma dystrybuantę F określoną wzorem.

a) Wyznacz jakie wartości może przyjąć C

b) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X

c) Oblicz prawdopodobieństwa: $P(-4 < X < 4)$, $P(X > 2)$.

4:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ 0{,}2 & -5 \le x < -1 \\ 0{,}6 & -1 \le x < 2 \\ C & 2 \le x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

$C \geq 0{,}6$, gdyż $F(x)_{\text{dla } x \in \langle 2;6)} = \underbrace{P(-5) + P(-1)}_{0{,}6} + P(2)$

zatem $F(x)$ dla $x \in \langle 2;6) = C = 0{,}6 + P(2) \geq 0{,}6$

$C \leq 1$, gdyż w skrajnym przypadku $P(6) = 0$, to

dla $x \geq 6$ $F(x) = 1 = F(x)_{x \in \langle 2;6)} + P(6)$

a) $C \in \langle 0{,}6; 1\rangle$

b) Funkcja prawdopodobieństwa nazywamy funkcję $p(x) = P(X = x)$, $x \in \{x_1, x_2 \ldots\}$

x	-5	-1	2	6
p(x)	0,2	0,4	C-0,6	1-C

c) $P(-4 < X < 4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{na podstawie stwierdzenia} \\ \text{z wykładu:} \\ P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) \end{array} \right\} =$

$= F(4) - F(-4) - P(X = 4) = C - 0{,}2 - (C - 0{,}6) = C - 0{,}2 - C + 0{,}6 = 0{,}8$

$\boxed{P(-4 < X < 4) = 0{,}8}$

$P(X > 2) = \{\text{z def. dystrybuanty}\} = F(2) = C$

$\boxed{P(X > 2) = C}$

wykonał

Sławomir Jabłoński,

s14736