Regresja - zadania i przykłady.

W5 e0

Zadanie 1. Poniżej zamieszczono fragmenty wydruków dotyczących dopasowania modelu regresji do zmiennej **ozone** w oparciu o promieniowanie (**radiation**), oraz w oparciu o promieniowanie i temperaturę (**temperature**). Zbiór zawiera 111 obserwacji.

(a) Podaj przybliżoną liczbę wartości resztowych w pierwszym modelu większych od $-0{,}5895$.

(b) Podaj procent zmienności dodatkowo wyjaśniony przez wprowadzenie zmiennej **temperature** do modelu ozone ~ radiation.

(c) Na podstawie wyniku przeprowadzonego testu stwierdź, czy wprowadzenie zmiennej **temperature** jest wskazane. Uzasadnij.

(d) Oblicz brakującą wartość na wydruku (miejsce zaznaczone kropkami ".....") i wytłumacz, jak otrzymano odpowiadającą p-wartość 0,0007.

W5 e1

---------- Model 1. Call: lm(formula = ozone ~ radiation, data = ozonedata)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.5811	-0.5895	-0.1162	0.5986	2.0508

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	2.4859713	0.1746316	14.24	< 2e-16
radiation	0.0041223	0.0008482	4.86	3.96e-06

Residual standard error: 0.8109 on 109 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1781,
F-statistic: 23.62 on 1 and 109 DF, p-value: 3.964e-06

---------- Model 2. Call: lm(formula = ozone ~ temperature + radiation)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.183	-0.4025	-0.03355	0.2965	1.95

Coefficients:

	Value	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-2.1530	0.4398	-4.8951	0.0000
temperature	0.0643	0.0059	10.9681	0.0000
radiation	0.0021	.....	3.4968	0.0007

Residual standard error: 0.5603 on 108 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.6112
F-statistic: 84.88 on 2 and 108 degrees of freedom, the p-value is 0

---

a) -0,5895 to wartość dla 1 kwartyla. Stąd ¾ wartości resztowych będzie większych (ze 111 obserwacji) -> 3/4 * 111 ~= 83
Odp. Przybliżona liczba wartości resztowych w pierwszym modelu większych od -0,5895 to 83.
b) W pierwszym modelu R^2= 0,1781 (współczynnik determinacji – na tyle model wyjaśnia zależność).
W drugim przypadku R^2=0,6112, tj. model wyjaśnia zależność w ok. 61%. Tak więc dodatnie zmiennej temperature zwiększyło wyjasnianie do 61%. Stąd zmiana procentu wyjaśniania to 0,6112 - 0,1781 = 0,4331 (czyli 43,31%)
Odp. Procent zmienności dodatkowo wyjaśniony przez wprowadzenie zmiennej temperature do modelu ozone~radiation to 43,31%.
c) Własności zmiennej temperature:
- zmienna jest istotna (p-wartość <0,01)
- po jej wprowadzeniu wzrasta współczynnik determinacji R^2
- zmalał błąd standardowy wartości resztowych
Odp. Wprowadzenie zmiennej temperature jest wskazane na podstawie wyżej przytoczonych wniosków.
d) Brakująca wartość na wydruku: Std. Error (błąd standardowy wartości resztowych) = value(wartość parametru)/ t value(wartość statystyki testowej), czyli 0,0021/3,4968 ~= 6,0055e-4 = 0,0006055
Otrzymanie odpowiadającej p-wartości:
0,0007 jest to empiryczny poziom istotności dla testu i jest najniższym poziomem istotności dla którego należy odrzucić H0 (ponieważ H0 jest takie, że zmienna temperature jest nieistotna). Szukam w tablicy rozkładu t-Studenta wartości statystyki testowej (3.4968) dla danej liczby stopni swobody (111-2=109) i odczytuję obszar krytyczny (poziom istotności) α, który odpowiada tej wartości statystyki, czyli naszą p-wartość 0,0007.
Odp. Brakująca wartość na wydruku to 0,0006055. P-wartość otrzymano na podstawie tablicy rozkładu t-Studenta w opisany sposób.

Zadanie 2. Zbiór **cheese** zawiera dane dotyczące smaku sera (zmienna **Taste**, miara subiektywna) oraz zmiennych

Acetic – logarytm zawartości kwasu octowego;
H2S – logarytm zawartości siarkowodoru;
Lactic – zawartość kwasu mlekowego.

Rozpatrzono dwa modele regresji dla zmiennej objaśnianej Taste. W pierwszym zmienną objaśniającą jest jedynie zmienna Acetic, w drugim dodatkowo zmienne H2S i Lactic. Na podstawie załączonego wydruku odpowiedz na następujące pytania:

(a) Wnioski dla zmiennej Acetic są inne w pierwszym i drugim modelu. Sprecyzuj na czym polega różnica i wytłumacz czym jest spowodowana.

(b) Oblicz brakującą wartość dla zmiennej H2S w drugim modelu.

(c) O ile wzrósł procent wyjaśnionej zmienności zmiennej Taste po dodaniu do pierwszego modelu zmiennych Lactic i H2S?

W5 e3

---------- Model 1: lm(formula = Taste ~ Acetic, data = cheese)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-29.642	-7.443	2.082	6.597	26.581

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-61.499	24.846	-2.475	0.01964
Acetic	15.648	4.496	3.481	0.00166

Residual standard error: 13.82 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.302, Adjusted R-squared: 0.2771
F-statistic: 12.11 on 1 and 28 DF, p-value: 0.001658

---------- Model 2: lm(formula = Taste ~ Acetic + H2S + Lactic, data = cheese)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-17.391	-6.612	-1.009	4.908	25.449

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-28.8768	19.7354	-1.463	0.15540
Acetic	0.3277	4.4598	0.073	0.94198
H2S	.....	1.2484	3.133	0.00425
Lactic	19.6705	8.6291	2.280	0.03108

Residual standard error: 10.13 on 26 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.6518, Adjusted R-squared: 0.6116
F-statistic: 16.22 on 3 and 26 DF, p-value: 3.81e-06 W5e4

---

a) Odp. Pomimo ze kierunek oddziaływania (+ albo -) jest ten sam, wartość zmniejszyła się, ponieważ lepiej zmienność Taste wyjaśnia Lactic i H2S, przez co zmienna Acetic okazała się nieistotna (wprowadzenie jej do tego modelu nie poprawia istotnie modelu w przypadku obecności zmiennych Lactic i H2S).

b) Brakującą wartość obliczamy w sposób analogiczny do poprzedniego zadania, tj. Estimate (wartość parametru) = t value(wartość statystyki testowej t) * Std. Error(błąd standardowy wartości resztowych) czyli 3,133*1,2484 ~= 3,9112
Odp. Brakująca wartość Estimate (tj. wartość parametru) wynosi 3,9112.

c) Porównuję wskaźniki determinacji R^2 i Adjusted R^2. Wskaźnik Adjusted R^2 bierze dodatkowo pod uwagę liczbę zmiennych uwzględnionych w modelu. Obliczam różnice odpowiednio R^2 i Adjusted R^2.
Dla R^2: 0,6518-0,302 = 0,3498 (34,98% różnicy)
Dla Adjusted R^2: 0,6116-0,2771 = 0,3345 (33,45% różnicy)
Odp. Procent wyjaśnionej zmienności zmiennej Taste po dodaniu do pierwszego modelu zmiennych Lactic i H2S wzrósł odpowiednio o 34,98% i 33,45% dla wskaźnika uwzględniającego ilość zmiennych w modelu.

Zadanie 3. Poniżej zamieszczona jest część wydruku dotycząca dopasowania modelu regresji do danych doty- cących liczby gatunków żółwi (zmienna zależna **Species**) na 30 wyspach archipelagu Galapagos. Rozpatrzono następujące zmienne niezależne:

Area - powierzchnia wyspy (km^2),
Elevation- wysokość najwyższego punktu (m),
Nearest - odległość do najbliższej wyspy (km),
Scruz - odległość do wyspy Santa Cruz,
Adjacent - powierzchnia najbliższej sąsiedniej wyspy.

W5 e5

	Species	Endemics	Area	Elevation	Nearest	Scruz	Adjacent
Baltra	58	23	25.09	346	0.6	0.6	1.84
Bartolome	31	21	1.24	109	0.6	26.3	572.33
Caldwell	3	3	0.21	114	2.8	58.7	0.78
Champion	25	9	0.10	46	1.9	47.4	0.18
Coamano	2	1	0.05	77	1.9	1.9	903.82
Daphne.Major	18	11	0.34	119	8.0	8.0	1.84
Daphne.Minor	24	0	0.08	93	6.0	12.0	0.34
Darwin	10	7	2.33	168	34.1	290.2	2.85
Eden	8	4	0.03	71	0.4	0.4	17.95
Enderby	2	2	0.18	112	2.6	50.2	0.10
Espanola	97	26	58.27	198	1.1	88.3	0.57
Fernandina	93	35	634.49	1494	4.3	95.3	4669.32
Gardner1	58	17	0.57	49	1.1	93.1	58.27
Gardner2	5	4	0.78	227	4.6	62.2	0.21
Genovesa	40	19	17.35	76	47.4	92.2	129.49
Isabela	347	89	4669.32	1707	0.7	28.1	634.49
Marchena	51	23	129.49	343	29.1	85.9	59.56
Onslow	2	2	0.01	25	3.3	45.9	0.10
Pinta	104	37	59.56	777	29.1	119.6	129.49
Pinzon	108	33	17.95	458	10.7	10.7	0.03
Las.Plazas	12	9	0.23	94	0.5	0.6	25.09
Rabida	70	30	4.89	367	4.4	24.4	572.33
SanCristobal	280	65	551.62	716	45.2	66.6	0.57
SanSalvador	237	81	572.33	906	0.2	19.8	4.89
SantaCruz	444	95	903.82	864	0.6	0.0	0.52
SantaFe	62	28	24.08	259	16.5	16.5	0.52
SantaMaria	285	73	170.92	640	2.6	49.2	0.10
Seymour	44	16	1.84	147	0.6	9.6	25.09
Tortuga	16	8	1.24	186	6.8	50.9	17.95
Wolf	21	12	2.85	253	34.1	254.7	2.33

W5 e6

```
> summary(lm(Species~Area+Elevation+Nearest+Scruz+Adjacent))
Call:
lm(formula = Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz + Adjacent)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-111.679  -34.898   -7.862   33.460  182.584

Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  7.068221  19.154198    0.369  0.715351
Area        -0.023938   0.022422   -1.068  0.296318
Elevation    0.319465   0.053663    5.953  3.82e-06
Nearest      0.009144   1.054136    0.009  0.993151
Scruz       -0.240524   0.215402   -1.117  0.275208
Adjacent    -0.074805   0.017700   -4.226  0.000297

Residual standard error: 60.98 on 24 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7658,     Adjusted R-squared: 0.7171
F-statistic:  15.7 on 5 and 24 DF,  p-value:  6.838e-007
```

(a) (1p.) Podaj procent zmienności liczby gatunków niewyjaśnionej przez zaproponowany model.
(b) (2p.) Sformułuj hipotezę zerową i alternatywną, której odpowiada liczba 0.296318. Jaką decyzję podejmiesz w tym przypadku ?

W5 e7

(c) (3p.) Sformułuj hipotezę zerową i alternatywną, której odpowiada liczba 0.000275 w prostszym modelu poniżej. Jaką decyzję podejmiesz w tym przypadku? Porównaj z (b) i skomentuj ewentualne różnice.

```
> summary(lm(Species~Area))

Call:
lm(formula = Species ~ Area)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-99.495 -53.431 -29.045   3.423 306.137

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 63.78286    17.52442   3.640 0.001094 **
Area         0.08196     0.01971   4.158 0.000275 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 91.73 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.3817,     Adjusted R-squared: 0.3596
F-statistic: 17.29 on 1 and 28 DF,  p-value: 0.0002748
```

a) Procent zmienności niewyjaśnionej przez model: 1- R^2 (czyli 1-0,7658 = 23,42 tj. 23,42%) lub 1-Adj.R^2 (czyli 1-0,7171 = 0,2829 tj. 28,29%).

Odp. Procent zmienności niewyjaśnionej przez model wynosi 23,42%.

b) H0: β_A =0, H1: β_A /= 0. β_A – wskaźnik regresji dla zmiennej Area

0,296318 = p-wartość dla testu istotności zmiennej Area, czyli prawdopodobieństwo zawierania się wartości statystyki testowej w zbiorze krytycznym tj. |t value| > |− 1,068| jeśli spełnione jest H0, gdzie t value to wartość statystyki testowej t

Decyzja: brak podstaw do odrzucenia H0 na każdym standardowo przyjmowanym poziomie istotności (p-value tj. p-wartość>0,1>0,05>0,01). Wniosek: zmienna jest nieistotna w modelu

Odp. Hipotezy: H0: β_A =0, H1: β_A /= 0. Decyzja: pozostawienie H0.

c) H0: β_A =0, H1: β_A /= 0

Zmienna jest istotna, ponieważ posiada niski wskaźnik p-value (p-wartość) = 0,000275. P-wartość = P(|t value|>=4,158 jeśli spełnione jest H0). t value oznacza tutaj wartość statystyki testowej t.

Decyzja: Hipoteza H0 odrzucona.

Zmienna Area samodzielnie wnosi informacje do wyjaśniania zmienności "Species", ale umieszona w modelu razem z innymi traci na znaczeniu (inne zmienne wyjaśniają tę samą zmienność)

Odp. Hipotezy: H0: β_A =0, H1: β_A /= 0. Decyzja: odrzucenie H0 i przyjęcie H1. Zmienna Area straciła na znaczeniu w modelu c) ponieważ dodatkowe zmienne dodane w tym modelu a nieobecne w b) lepiej tłumaczą zmienność liczby gatunków żółwi Species.

Zadanie 4. Na podstawie danych **fish** dotyczących 159 ryb złowionych w jeziorze Laengelmavesi koło Tampere starano się znaleźć zależność między ich wagą (**Weight**) a wysokością (**Height**), szerokością (**Width**) i długościami **L1**, **L2**, **L3** (patrz rys. 2). W pierwszym modelu uwzględniono wszystkie zmienne niezależne, w drugim usunięto zmienną Height. Przyjęto $\alpha = 0{,}05$.

(a) (1 p.) Które ze zmiennych w pierwszym modelu są istotne? Uzasadnij, sformułuj odpowiednie hipotezy zerowe dla zmiennych istotnych.

(b) (2 p.) Czy zmienna *L*3 jest istotna w obu modelach? Dlaczego tak się dzieje?

(c) (1 p.) Co oznacza liczba 0,9907 dla trzeciego modelu i jakiej zmiennej dotyczy?

(d) (2 p.) Na podstawie załączonych rysunków oceń dopasowanie modelu pierwszego i trzeciego.

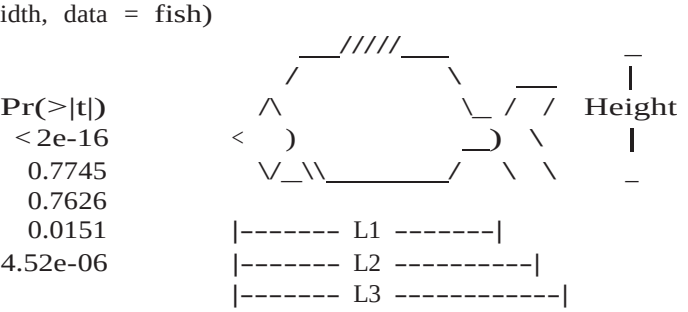
W5 e9

```
lm(formula = Weight ~ L1 + L2 + L3 + Height + Width, data = fish)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -504.084     30.370 -16.598  < 2e-16
L1            52.829     40.694   1.298  0.19632
L2             3.997     42.030   0.095  0.92438
L3           -29.292     17.648  -1.660  0.09915
Height        30.043      8.883   3.382  0.00093
Width         10.638     21.029   0.506  0.61374
---
Residual standard error: 120.4 on 142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8909,     Adjusted R-squared: 0.8871
F-statistic:     232 on 5 and 142 DF,   p-value: < 2.2e-16

lm(formula = Weight ~ L1 + L2 + L3 + Width, data = fish)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -523.502     30.892 -16.946  <2e-16
L1            11.544     40.212   0.287  0.7745
L2           -13.082     43.222  -0.303  0.7626
L3            22.430      9.123   2.459  0.0151
Width         65.719     13.781   4.769 4.52e-06
---
Residual standard error: 124.7 on 143 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8821,     Adjusted R-squared: 0.8788
F-statistic: 267.6 on 4 and 143 DF,   p-value: < 2.2e-16
```



W5 e10

```
> fish3.lm <- lm(Weight^0.3 ~ L1 + L2 + L3 + Height + Width, data=fish)

> print(summary(fish3.lm))

lm(formula = Weight^0.3 ~ L1 + L2 + L3 + Height + Width, data = fish)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.54870    0.04462  12.298  < 2e-16
L1           0.01622    0.05978   0.271    0.787
L2           0.08231    0.06174   1.333    0.185
L3          -0.01549    0.02593  -0.597    0.551
Height       0.11443    0.01305   8.768 5.06e-15
Width        0.35494    0.03089  11.489  < 2e-16
Residual standard error: 0.1769 on 142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9907,     Adjusted R-squared: 0.9904
F-statistic:   3022 on 5 and 142 DF,   p-value: < 2.2e-16
```

W5 e11

a) Odp. W pierwszym modelu istotna jest jedynie zmienna Height. Warunkiem istotności zmiennej jest p-value(p-wartość) dla niej <0,05. Hipoteza zerowa jak w poprzednim zadaniu: H0: $\beta_H = 0$, H1: $\beta_H \neq 0$ gdzie β_H – wskaźnik regresji zmiennej Height.

b) Odp. W pierwszym modelu zmienna L3 nie jest istotna, w drugim tak. Dzieje się tak, ponieważ wyjaśnia ona część zmienności, którą wcześniej wyjaśniała usunięta w modelu drugim zmienna Height (zmienna ta była istotna).

c) Odp. Jest to współczynnik determinacji –nie dotyczy on żadnej zmiennej, a mówi jaka część zmienności zmiennej Weight^0,3 jest wyjaśniana przez predykatory (L1, L2, L3, Height i Width).

d) Odp. Model pierwszy posiada wyższe współczynniki determinacji R^2 i Adjusted R^2, co wskazuje na wyjaśnianie więcej zmienności Weight^0,3 niż Weight poprzez zadane zmienne. Szacowanie wagi ryby na podstawie sumy jej wymiarów kłóci się z jakimkolwiek fizycznym sposobem wyznaczania wagi ciał na podstawie ich rozmiarów, w związku z tym uważam oba modele za nieoddające istoty problemu. Nie potrafię wyjaśnić pochodzenia współczynnika 0,3 w trzecim modelu ani powodu, dla którego zmienia on poziom wyjaśniania o blisko 10%.

wykonał

Sławomir Jabłoński,

s14736