Wykład XI

Zadanie 1.

Automat w fabryce czekolady wytwarza tabliczki o nominalnej wadze 250 g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek jest normalny. Kontrola techniczna pobrała próbę losową 16 tabliczek czekolady i otrzymała ich średnią wagę 244 g oraz odchylenie 5 g. Czy można twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki o zaniżonej wadze? Zweryfikować stosowną hipotezę na poziomie istotności 0,01?

1. $X_1, \ldots, X_{16}$ – prosta próba losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$
stąd $n = 16$

$\bar{X} = 244$

$S = 5$

σ – nieznane

$\mu_0 = 250$

$H_0: \mu = \mu_0 = 250$

$H_1: \mu < \mu_0$

$\alpha = 0{,}01 \quad 1-\alpha = 0{,}99$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\bar{X} - 250}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Korzystam z modelu 1.
liczba stopni swobody $= n-1 = 16-1 = 15$

$t_{0{,}99;15} = 2{,}603$

Obszar krytyczny $C = \{t: t \leq -2{,}603\}$

Podstawiam dane do statystyki testowej:

$$t = \frac{244-250}{\frac{5}{\sqrt{16}}} = \frac{-6 \cdot 4}{5} = -\frac{24}{5} = -4{,}8$$

$-4{,}8 < -2{,}603$ → czyli t zawiera się w zbiorze krytycznym, w związku z czym odrzucamy H_0 i przyjmujemy H_1 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ stwierdzono, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki o zaniżonej wadze.

Zadanie 2.

Miesięczne wydatki na żywność w przeliczeniu na jedną osobę w gospodarstwie pracowniczym mają rozkład normalny o wariancji 2500. Na podstawie badania 25 losowo wybranych gospodarstw stwierdzono, że średnie wydatki w tej grupie wynoszą 250. Czy na podstawie powyższych danych na poziomie istotności 0,1 można sądzić, że przeciętne wydatki na żywność ogółu gospodarstw wynoszą 230.

2. $X_1, \dots X_{25}$ - prosta próba losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$

μ - nieznane

$\sigma^2 = 2500$ - stąd $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 50$

$n = 25$

$\bar{x} = 250$

$\alpha = 0{,}1$

$H_0: \mu = 230$

$H_1: \mu \neq 230$

stosujemy model 3.

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\bar{X} - 230}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \qquad z_{0{,}95} = 1{,}64$

zbiór krytyczny $C = \{z : |z| \geq 1{,}64\}$

Po podstawieniu danych do statystyki testowej:

$$z = \frac{\bar{x} - 230}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{250 - 230}{\frac{50}{5}} = \frac{20 \cdot 3}{50} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$|1{,}2| = 1{,}2 < 1{,}64$

Wartość z nie należy do zbioru krytycznego, nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy H0 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$.

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ stwierdzamy, że przeciętne wydatki na żywność ogółu gospodarstw wynoszą 230.

Zadanie 3.

Średnie odchylenie od normy pracochłonności przy produkcji wyrobu pojedynczego robotnika powinno wynosić 7,9 min/wyrób. Wylosowano 20 robotników, których odchylenie standardowe pracochłonności wynosiło 8,4 min/wyrób. Przyjmując poziom istotności 0,05 zweryfikować hipotezę zakładanym odchyleniu standardowym przy założeniu normalności.

3. $X_1, \dots X_{20}$ - prosta próba losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$

μ - nieznane

$n = 20$

$\sigma_0 = 7{,}9$

$s = 8{,}4$

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \sigma = \sigma_0 = 7{,}9$

$H_1: \sigma \neq \sigma_0$

Korzystam z modelu 3.

Statystyka testowa:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{7{,}9^2}$$

$\alpha = 0{,}05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \quad n = 20$

Liczba stopni swobody $n-1 = 19$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0{,}025;19} = 8{,}907$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0{,}975;19} = 32{,}8523$$

Reguła decyzyjna (na podst. zbioru krytycznego): odrzuć H_0, jeśli obliczona wartość statystyki $\chi^2 \leq 8{,}907$ lub $\chi^2 \geq 32{,}852$

wartość statystyki testowej: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{7{,}9^2} = \frac{19 \cdot 8{,}4^2}{7{,}9^2} = \frac{19 \cdot 70{,}56}{62{,}41} \approx 21{,}481$

$8{,}907 < 21{,}481 < 32{,}852 \rightarrow$ brak więc podstaw do odrzucenia H_0.

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ brak dostatecznych dowodów aby twierdzić, że odchylenie standardowe pracochłonności różne jest od 7,9 min/wyrób.

Zadanie 4.

Maszyna jest nastawiona tak, aby produkowała kulki łożyskowe mające przeciętną średnicę równą l. Próba losowa 10 wyprodukowanych kulek przez tę maszynę dała średnią średnicę równą 1,004. Czy na poziomie istotności 0,05 jest powód do podejrzeń, że maszyna produkuje kulki niezgodne z normą? Zakładamy, że średnica produkowanych kulek ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 0,003.

4. $X_1, \ldots X_{10}$ - prosta próba losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$

$\mu_0 = 1$
$\sigma = 0{,}003$
$n = 10$
$\alpha = 0{,}05$
$\bar{x} = 1{,}004$
$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Stosuję model 3.

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \qquad z_{0{,}975} = 1{,}96$

zbiór krytyczny $C = \{z : |z| \geq 1{,}96\}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy wartość statystyki testowej:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1{,}004 - 1}{\frac{0{,}003}{\sqrt{10}}} = \frac{0{,}004}{0{,}003} \cdot \sqrt{10} = \frac{4}{3}\sqrt{10} \approx 4{,}22$$

$|z| = 4{,}22 \geq 1{,}96 \rightarrow z \in C$, co daje podstawę do odrzucenia H_0 i przyjęcia H_1 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ mamy prawo podejrzewać, iż maszyna produkuje kulki niezgodne z normą.

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736