# PARA ZMIENNYCH LOSOWYCH

**Zadanie 1.** Mężczyzna i kobieta umawiają się na spotkanie. Każda z osób pojawia się niezależnie w ustalonym miejscu. Czas przybycia każdej z osób ma rozkład jednostajny między godz. 12:00 a 13:00.

(a) Znaleźć łączny rozkład czasów przybycia mężczyzny i kobiety (przyjąć minutę jako jednostkę czasu).

(b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba która przyjdzie pierwsza będzie czekała nie dłużej niz 10 minut.

**Zadanie 2.** Niech będą dane zmienne losowe $X$ i $Y$ o łącznej gęstości danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}xy, & \text{dla } 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Obliczyć: $P(X < 1{,}5)$, $P(Y > 2)$, $P(X + Y > 1)$, $P(X > Y)$.

**Zadanie 3.** Niech będą dane zmienne losowe $X$ i $Y$ o łącznej gęstości danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x + y - 2xy), & \text{dla } 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Pokazać, że $X$ i $Y$ mają rozkłady brzegowe prostokątne. Czy $X$ i $Y$ są niezależne?

**Zadanie 4.** Niech będą dane zmienne losowe $X$ i $Y$ o łącznej gęstości danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\alpha y e^{-\alpha x}, & \text{dla } 0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le 1, \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Znaleźć gęstości brzegowe. Czy $X$ i $Y$ są niezależne?

**Zadanie 5.** Niech będą dane zmienne losowe $X$ i $Y$ o łącznej gęstości danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), & \text{dla } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

(a) Sprawdzić, że f(x,y) jest funkcją gęstości łącznej.

(b) Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $X$.

(c) Obliczyć $P(X > Y)$.

(d) Obliczyć $P(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.

(e) Obliczyć $E(X)$.

(f) Obliczyć $E(Y)$.

**Zadanie 6.** Wiadomo, że spośród 5 tranzystorów 2 są wadliwe. Tranzystory są badane kolejno, aż do momentu wykrycia obu tranzystorów wadliwych. Niech $N_1$ oznacza liczbę wykonanych badań do wykrycia pierwszego wadliwego tranzystora, a $N_2$ liczbę dodatkowych badań potrzebnych do wykrycia drugiego wadliwego tranzystora. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa łącznego $N_1$ i $N_2$.

**Zadanie 7.** Rozpatrzmy ciąg niezależnych doświadczeń Bernoulliego, każde z prawdopodobieństwem sukcesu równym $p$. Niech $X_1$ oznacza liczbę porażek przed pierwszym sukcesem, a $X_2$ liczbę porażek między dwoma pierwszymi sukcesami. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa łącznego $X_1$ i $X_2$.

**Zadanie 8.** Funkcja prawdopodobieństwa łącznego zmiennych losowych $X$ i $Y$ wynosi

$$p(1,1) = \frac{1}{8}, \quad p(1,2) = \frac{1}{4}, \quad p(2,1) = \frac{1}{8}, \quad p(2,2) = \frac{1}{2}.$$

(a) Wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa warunkowego $P(X|Y = i), i = 1, 2$.

(b) Czy $X$ i $Y$ są niezależne?

(c) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(d) Obliczyć $P(XY \leq 3)$, $P(X + Y > 2)$, $P(X/Y > 1)$.