

## Rachunek zdań

1. Które z następujących wyrażeń są zdaniami? Podaj wartości logiczne tych zdań.

- (a) 2 jest liczbą pierwszą lub nie jest prawdą, że 3 jest liczbą parzystą.
- (b) Dlaczego logika jest ważna?
- (c) Liczba 4 jest dodatnia, a liczba 3 jest ujemna.
- (d)  $x - y = y - x$
- (e) Jeśli  $3 \cdot 2 = 1$ , to  $\cos(2006^\circ) > \frac{1}{2}$ .
- (f) Matematyka jest zabawna.

2. Znajdź kontrprzykłady na następujące stwierdzenia.

- (a) Jeśli  $m, n$  są niezerowymi liczbami całkowitymi, które są nawzajem podzielne przez siebie, to  $m = n$ .
- (b) Dla każdej liczby naturalnej  $n$  prawdą jest, że  $n^2 < 2^n$ .

3. Niech  $p, q, r$  i  $s$  będą następującymi zdaniami:

- $p = \text{wartość}(X) > 0$ ,
- $q = \text{wartość}(Y) > 0$ ,
- $r =$  wyniki są wyświetlane na ekranie,
- $s = \text{wartość}(X) := \text{wartość}(X) + 1$ .

Zapisz każde z poniższych zdań za pomocą symboliki logicznej.

- (a) Jeśli nie jest prawdą, że  $\text{wartość}(X) > 0$ , to  $\text{wartość}(X) := \text{wartość}(X) + 1$ .
- (b) Wyniki są wyświetlane na ekranie wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{wartość}(X) > 0$ .
- (c) Jeśli  $\text{wartość}(X) > 0$  i  $\text{wartość}(Y) > 0$ , to wyniki są wyświetlane na ekranie.

4. Wykaż, że następujące wyrażenia są tautologiami. Zastosuj dwie metody: zerojedynkową i “nie wprost”.

- (a)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$  - określenie implikacji za pomocą alternatywy
- (b)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$  - prawo de Morgana
- (c)  $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

5. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami.

- (a)  $p \rightarrow [\neg p \vee q]$
- (b)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$

6. Alternatywa wykluczająca  $XOR$  jest zdefiniowana za pomocą matrycy:

$p$	$q$	$p XOR q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zbuduj matryce logiczne dla zdań:

- (a)  $(p XOR p) XOR p$
- (b)  $(p XOR q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

7. Rozważ następujący zbiór zdań:

- Jeśli się nie mylę, to dzisiaj jest sobota.
- Albo dzisiaj to nie wczoraj, albo dzisiaj jest piątek.
- Nie mylę się, jeśli jesteś tutaj.
- Jeśli dzisiaj jest piątek, to dzisiaj nie jest sobota.
- Jeśli dzisiaj jest sobota, to wczoraj był piątek.

Zapisz powyższe zdania w postaci formuł rachunku zdań. Zbadaj niesprzeczność tego zbioru. Zakładając, że powyższe zdania są prawdziwe, zbadaj czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź starannie uzasadnij.

- (a) Jeśli się nie mylę, to jesteś tutaj.
- (b) Jeśli dzisiaj jest piątek, to nie mylę się.
- (c) Jeśli się mylę, to wczoraj był piątek.

8. Podaj dowód formalny twierdzenia  $(p \wedge \neg r) \rightarrow (q \rightarrow p)$  i  $(q \wedge \neg r)$ .

9. Udowodnić, że jeżeli zdanie  $p$  jest fałszywe, to dla każdego zdania  $q$  mamy:

- (a)  $p \vee q \leftrightarrow q$
- (b)  $p \wedge q \leftrightarrow p$ .

10. Zaproponuj zdanie złożone ze zmiennych zdaniowych  $p, q, r$ , które:

- (a) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie jedna z trzech zmiennych  $p, q, r$  jest prawdziwa,
- (b) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie dwie z trzech zmiennych  $p, q, r$  są prawdziwe.