

Rachunek predykatów

1. Podaj, jeśli jest to możliwe, wartości logiczne poniższych wyrażeń.

- (a) $\forall x(\sqrt{x^2} = x)$ jeśli dziedziną jest zbiór \mathbb{Z}
- (b) $\forall m\exists n(2m = n)$ jeśli dziedziną jest zbiór \mathbb{N}
- (c) $\exists(x \in \mathbb{N})(x + y = 5)$
- (d) $\forall n\exists k(2^n = k)$ jeśli dziedziną jest zbiór \mathbb{N}
- (e) $\forall n\exists k((n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}) \rightarrow (n = 2^k))$ jeśli dziedziną jest zbiór \mathbb{N}
- (f) $\forall x\exists y((x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}) \rightarrow (x > y))$
- (g) $\exists y\forall x(x < y)$ jeśli dziedziną jest zbiór \mathbb{R}
- (h) $\exists(r \in \mathbb{R})\forall(n \in \mathbb{N})(r < n)$
- (i) $\exists(k \in \mathbb{Z})\exists(s \in \mathbb{R})((k + 2s = -1) \wedge (2k - s = -14))$

2. Zapisz następujące zdania za pomocą symboliki logicznej.

- (a) Jeśli długość słowa w jest równa 2, to $w \in \Sigma$.
- (b) Nie istnieje liczba, której kwadrat byłby mniejszy od 0.
- (c) Istnieje liczba naturalna n , taka że $kn = k$ dla wszystkich liczb całkowitych k .
- (d) Jeśli suma dwóch liczb pierwszych jest parzysta, to żadna z tych liczb nie jest równa 2.
- (e) Liczby całkowite x i y mają takie same dzielniki.
- (f) x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z .

3. Określ, które zmienne w następujących wyrażeniach są wolne, a które związane.

- (a) $\forall x\exists y((xy = xz) \rightarrow (y = z))$
- (b) $\forall x(x < 0 \rightarrow (xy > 0 \vee (\exists z(x + z = y))))$
- (c) $\forall x(x \in \mathbb{R} \rightarrow (x = 2^y)) \wedge (xy > 0 \vee \forall z(z \in \mathbb{R} \rightarrow (xyz < 0)))$

4. Sprawdź, czy zdanie $\forall x\exists y((x^2 + 1)y = 1)$ jest prawdziwe jeśli dziedziną jest zbiór: (a) \mathbb{N} , (b) \mathbb{Q} , (c) \mathbb{R} .

5. Napisz zaprzeczenie wyrażenia $\forall x\forall y((x^2 = y) \rightarrow \exists z(x \leq z \leq y))$ nie używając spójnika negacji.

6. Udowodnić, że poniższe wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.

- (a) $\neg\exists x(p(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg p(x))$ - prawo de Morgana
- (b) $\exists x\forall y(p(x, y)) \rightarrow \forall y\exists x(p(x, y))$
- (c) $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \exists x(p(x)) \wedge \exists x(q(x))$

7. Sprawdź, czy poniższe wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.

- (a) $\exists x(p(x)) \wedge \exists x(q(x)) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$
- (b) $\exists x\exists y(p(x, y)) \rightarrow \exists x(p(x, x))$
- (c) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow (\forall x(p(x)) \rightarrow \forall x(q(x)))$