ĆWICZENIA VI, VII i VIII

(relacje)

Zadania

1. Wyznacz wszystkie elementy relacji $r \subseteq X \times Y$, gdy:

   (a) $X = \{$pyton, sęp, struś$\}$, $Y = \{$zebra, gepard$\}$ oraz $x\ r\ y$ wttw, gdy słowo x nie ma ani jednej wspólnej litery ze słowem y,

   (b) $X = Y = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, 1\}$ oraz $x\ r\ y$ wttw, gdy $\frac{x}{y} \geq 1$.

2. Zapisz relację $r \subseteq U \times U$ jako (a) zbiór par uporządkowanych, (b) w postaci tabelki (macierzy) i (c) w postaci grafu. Określ jej własności (czy jest zwrotna, przeciwzwrotna, symetryczna, przeciwsymetryczna, antysymetryczna, przechodnia).

   (a) $U = \{-3, -2, 0, 1, 4, 5, 6\}$, $(n, m) \in r$ wttw $m^2 - n^2 \equiv 0 \bmod 3$.

   (b) $U = \{-12, -8, -2, -1, 0, 2, 4, 5, 6\}$, $(n, m) \in r$ wttw $n|m$ (n jest dzielnikiem m).

   (c) $U = \{-10, -5, -4, -3, 1, 2, 4, 5\}$, $(n, m) \in r$ wttw $|n + m| < |m|$.

3. Jakie własności ma graf relacji określonej w zbiorze o skończonej liczbie elementów, jeśli relacja ta jest:

   - zwrotna,
   - przeciwzwrotna,
   - symetryczna,
   - przeciwsymetryczna,
   - antysymetryczna,
   - spójna,
   - przechodnia,
   - relacją równoważności.

   Podaj odpowiednie przykłady.

4. Jakie własności ma tabelka relacji określonej w zbiorze o skończonej liczbie elementów, jeśli relacja ta jest:

   - zwrotna i symetryczna,
   - przeciwzwrotna i antysymetryczna.

   Podaj odpowiednie przykłady.

5. Sprawdź, które z własności: zwrotność, przeciwzwrotność, symeryczność, antysymetryczność, przeciwsymetryczność (asymetryczność), przechodniość, spójność posiada relacja $r \subseteq A \times A$ gdy:

   (a) A - zbiór miast leżących w Azji, $r = \{(a, b) : a$ jest miastem położonym nie niżej nad poziomem morza niż miasto $b\}$,

   (b) $A = \{x, y, z\}$, $r = \{(x, x), (y, x), (y, z), (z, z), (z, y)\}$,

   (c) $A = 2^{\mathbb{N}}$, $r = \{(A, B) : A \subseteq B\}$,

   (d) $A = \mathbb{N}$, $r = \{(a, b) : \mathrm{NWD}(a, b) = 1\}$, gdzie NWD oznacza największy wspólny dzielnik.

6. Zbadaj własności podanej relacji (zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, przeciwsymetria, przechodniość, antysymetria) :

(a) r jest relacją binarną w zbiorze liczb naturalnych taką, że $x\ r\ y$ wttw istnieje różna od 1 liczba naturalna, która jest dzielnikiem zarówno x, jak i y,

(b) r jest relacją binarną w zbiorze liczb $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ taką, że $x\ r\ y$ wttw $x-y$ jest liczbą parzystą,

(c) r jest relacją binarną w zbiorze liczb naturalnych taką, że $x\ r\ y$ wttw liczba jedynek w binarnej reprezentacji liczby x jest mniejsza niż liczba jedynek w binarnej reprezentacji liczby y.

7. Relacja r określona w zbiorze X jest euklidesowska, gdy dla dowolnych $x, y, z \in X$, jeśli $x\ r\ y$ i $x\ r\ z$, to również $y\ r\ z$. Sprawdź, która z relacji spełnia ten warunek.

(a) $r \subset 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$, $A\ r\ B$ wttw, gdy $A \cap B = \emptyset$.

(b) $r \subset \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$, $(x_1, x_2, x_3)\ r\ (y_1, y_2, y_3)$ wttw, gdy $x_2 = y_2$.

8. Niech A $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz niech r_1 i r_2 będą dwiema relacjami binarnymi w A: $r_1 = \{(x, y) \in A \times A : y \equiv (x + 4) \bmod 6\}$, $r_2 = \{(x, y) \in A \times A\ :\ x$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą większa niż $y\}$. Wyznacz r_1^{-1}. Narysuj graf relacji złożonej $r_1 \circ r_2$. Czy relacja $r_2 \circ r_1$ jest identyczna z relacją $r_1 \circ r_2$?

9. Niech r będzie relacją binarną określoną w zbiorze U. Udowodnij, że:

(a) jeśli relacja r jest symetryczna, to relacja r^{-1} też jest symetryczna,

(b) jeśli relacje r_1 i r_2 są antysymetryczne, to relacja $r_1 \cap r_2$ też jest antysymetryczna,

(c) jeśli relacje r_1 i r_2 są zwrotne, to relacja $r_1 \circ r_2$ też jest zwrotna.

10. Niech r, s i u będą relacjami binarnymi określonymi w zbiorze U. Zbadaj prawdziwość podanych zdań:

(a) Jeżeli r i s są relacjami przechodnimi, to ich przecięcie $r \cap s$ też jest relacją przechodnią.

(b) Jeżeli $r \cap s$ jest relacją przechodnią, to obie relacje r i s są przechodnie.

(c) Jeżeli relacje r i s są symetryczne, to ich suma $r \cup s$ jest relacją symetryczną.

(d) Jeżeli suma $r \cup s$ relacji jest relacją symetryczną, to każda z relacji r, s musi być symetryczna.

11. Sprawdź, czy relacja r określona w zbiorze X jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wyznacz jej klasy abstrakcji.

(a) X - zbiór miast leżących w Europie, $r = \{(x, y) : x$ jest miastem położonym w tym samym państwie, co miasto $y\}$,

(b) X - zbiór studentów wszystkich warszawskich uczelni, $r = \{(x, y) : x$ studiuje na tej samej uczelni, co $y\}$,

(c) $X = \{x, y, z\}$, $r = \{(x, x), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}$,

(d) $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) : (x - y)(x + y) = 0\}$,

(e) $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) : x - y$ jest podzielne przez $3\}$,

(f) $X = \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : xy = 2k$ dla $k \in \mathbb{Z}\}$,

(g) $X = \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : \max\{x, y\} = x\}$,

12. Sprawdź, czy relacja r określona w zbiorze X jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wyznacz jej klasy abstrakcji.

(a) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$,

(b) $X = \mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 y_2 = y_1 x_2$.

13. Sprawdź, czy relacja r jest relacją porządku w zbiorze X. Jeśli tak wskaż elementy wyróżnione.

(a) $X = \mathbb{Z}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $|x| \leq |y|$,

(b) $X = \mathbb{R}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $x^5 \geq y^5$,

(b) $X = \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $x \leq y$,

(c) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 \leq x_2$,

(d) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 \le x_2$ lub ($x_1 = x_2$ i $y_1 \le y_2$),

(e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 + y_1 \le x_2 + y_2$.

14. Rozważmy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z relacją $\le$.

(a) Czy $(\mathbb{R}, \le)$ jest kratą?

(b) Podaj przykład niepustego podzbioru zbioru $\mathbb{R}$, który nie ma ograniczenia górnego w $\mathbb{R}$.

(c) Znajdź $sup\left(\{x \in \mathbb{R} : x < 17\}\right)$, $sup\left(\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\}\right)$, $sup\left(\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 17\}\right)$.

(d) Znajdź $inf\left(\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\}\right)$, $inf\left(\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 17\}\right)$.

15. Niech $T = \{3^n : n \in N\} \cup \{2\}$. Podaj przykład relacji częściowego porządku i przykład relacji liniowego porządku w zbiorze T. Wskaż, o ile istnieją, elementy wyróżnione w zbiorze T uporządkowanym przez podaną relację.

16. Podaj przykład relacji liniowego porządku w zbiorze par liczb naturalnych

$$T = \{(3, 10), (4, 9), (5, 8), ..., (9, 4), (10, 3)\}.$$

Narysuj diagram Hassego tej relacji. Wskaż elementy wyróżnione.

17. Niech $A = \{1 - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ będzie podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ uporządkowanego przez relację nie większości $\le$. Podaj trzy różne ograniczenia górne zbioru A w $\mathbb{R}$. Wskaż, o ile istnieje, kres górny zbioru A.

18. Podaj, o ile to możliwe, przykład zbioru częściowo uporządkowanego w postaci diagramu Hassego, który ma:

(a) tylko jeden element maksymalny i nie ma elementu największego,

(b) ma tylko dwa elementy minimalne i nie ma elementu największego.

19. Niech r będzie relacją binarną określoną w zbiorze liczb naturalnych taką, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$, $x\ r\ y$ wttw x jest dzielnikiem y . Niech r^* będzie relacją binarną określoną w zbiorze $P(\mathbb{N})$ taką, że $A\ r^*\ B$ wttw $A \cup B = B$, dla dowolnych A, B należących do $P(\mathbb{N})$. Wyznacz kres dolny i kres górny zbiorów A, B ze względu na relację r oraz kres górny i kres dolny zbiorów $\{A, B\}$, $P(A)$ i $P(B)$ w sensie relacji r^*. Wskaż elementy wyróżnione w zbiorze $A \cup B$ uporządkowanym przez relację r.

(a) $A = \{5, 10, 15, 30\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$,

(b) $A = \{11, 111, 1111, 11111\}$, $B = \{44, 444, 4444, 44444, 44444\}$,

(c) $A = \{5i : i \in N\}$, $B = \{3i : 0 < i < 5\}$,

(d) $A = \{5, 7, 11, 13\}$, $B = \{6, 8, 12, 14\}$,

(e) $A = \{2i : i < 15\}$, $B = \{3j : 0 < j < 7\}$,

(f) $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, $B = \{5, 35, 10, 30, 25\}$.

20. Niech F będzie zbiorem wszystkich funkcji określonych na odcinku $[0, 1]$ o wartościach w $\mathbb{R}_+$. Definiujemy relację r w zbiorze F taką, że $f\ r\ g$ wttw, gdy dla każdego x należącego do dziedziny zachodzi $f(x) \le g(x)$. Udowodnij, że r jest częściowym porządkiem w F. Wskaż elementy wyróżnione.

21. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $(X, \le)$ oraz niepusty zbiór T. W zbiorze F wszystkich funkcji z T w X określamy relację r taką, że $f\ r\ g$ wttw, gdy dla wszystkich $t \in T$, $f(t) \le g(t)$.

(a) Udowodnij, że r jest relacją częściowego porządku.

(b) Zbadaj, czy relacja r^* taka, że dla dowolnych f, g ze zbioru F, $f\ r^*\ g$ wttw, gdy istnieje $t \in T$ takie, że $f(t) \le g(t)$ jest relacją częściowego porządku w F.

22. Niech $p(n)$ będzie liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n. W zbiorze $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ określamy relację r taką, że $x\ r\ y$ wttw, gdy albo $p(x) < p(y)$ albo $p(x) = p(y)$ i $x \le y$.

(a) Udowodnij, że zbiór $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}, r)$ jest liniowo uporządkowany. Wskaż elementy wyróżnione.

(b) Zbadaj, czy relacja r jest dobrym porządkiem w zbiorze $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

23. Niech $f : A \times A \to A$ i dla wszystkich $x, y, z \in A$ zachodzi:

$$f(x,y) = f(y,x), \quad f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z), \quad f(x,x) = x$$

Definiujemy relacje $\leq$ taką, że x $\leq$ y wttw, gdy $f(x,y) = x$. Udowodnij, że $\leq$ jest porządkiem częściowym na A. Wykaż, że $f(x,y)$ jest największym kresem dolnym względem porządku $\leq$.

24. Niech f będzie bijekcją odwzorowującą zbiór uporządkowany (X, r) na zbiór uporządkowany (X^*, r^*) taką, że dla dowolnych x, y ze zbioru X, $x\ r\ y$ wttw $f(x)\ r^*\ f(y)$. Zbadaj, czy prawdziwe są własności:

(a) W zbiorze X istnieje element minimalny wttw w zbiorze X^* istnieje element minimalny.

(b) W zbiorze X istnieje element maksymalny wttw w zbiorze X^* istnieje element maksymalny.

(c) Dla dowolnego podzbioru A zbioru X, jeżeli istnieje kres dolny zbioru A w X, to istnieje kres dolny zbioru $f(A)$ w zbiorze X^*.

(d) W zbiorze X istnieje element największy wttw w zbiorze X^* istnieje element największy.

(e) Jeżeli X jest zbiorem skończonym oraz (X, r) jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to (X^*, r^*) jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

(f) Jeżeli zbiór (X^*, r^*) jest liniowo uporządkowany, to zbiór (X, r) jest też liniowo uporządkowany.

25. Sprawdź, czy zbiór X jest (a) liniowo (b) dobrze uporządkowany przez relację r, gdy:

(a) $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ oraz $r = \{(x, y) : x \leq y\}$,

(b) $X = (1, 10)$ oraz $r = \{(x, y) : x \leq y\}$,

(c) $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ oraz $r = \{(x, y) : x|y\}$,

(d) $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, \ldots, 10\})$ oraz $r = \{(A, B) : A \subset B\}$.

26. Dana jest relacja r określona w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Narysuj diagramy Hassego zbioru częściowo uporządkowanego (A, r). Wskaż elementy wyróżnione.

$r = \{(1,2), (2,3), (3,4), (3,5), (2,6), (6,8), (6,7)\}$,

$r = \{(1,2), (1,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,7), (5,7), (6,7)\}$.

27. Narysuj diagramy Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$, gdzie $U = \{1, 10, 11\}$. Wskaż elementy wyróżnione. Wyznacz $sup(A)$ i $inf(A)$, gdzie $A = \{X : X \in \mathcal{P}(\{1, 10\})\}$. Czy w zbiorze $\mathcal{P}(U)\backslash\{\emptyset, U\}$ (zbiór złożony z podzbiorów właściwych zbioru U) istnieje element najmniejszy i największy?

28. Niech $(A, |)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Wskaż elementy wyróżnione, gdy:

(a) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,

(b) $A = \{2, 3, 4 \ldots, 100\}$,

(c) $A = \{5^x : x \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 4, 6, 9\}$,

(d) $A = \mathbb{N}$,

(e) $A = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$,

(f) $A = \mathbb{Z}$.

29. Dany jest zbiór $A = \{a, b\}$, gdzie $a < b$. Wypisz elementy aba, bab, aa, bbb, ab, $bbab$, $abbb$ zbioru A^* w porządku rosnącym w sensie porządku (a) leksykograficznego (b) standardowego.

30. Niech Σ będzie pewnym alfabetem. Dla $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ niech $w_1\ \ r\ \ w_2$ wttw, gdy długość(w_1) $\leq$długośćw_2. Czy r jest częściowym porządkiem w zbiorze Σ^*? odpowiedź uzasadnij.

31. Udowodnij, że jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym jest element największy (najmniejszy), to jest on jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).

32. Czy dla danego $X \neq \emptyset$ można tak określić relację r tak, by była ona relacją równoważności i jednocześnie zbiór (X, r) był częściowo uporządkowany?

33. Czy dla danego X takiego, że $|X| > 1$ można tak określić relację r, by była ona relacją równoważności i jednocześnie zbiór (X, r) był liniowo uporządkowany?

34. Niech F będzie zbiorem wszystkich odwzorowań postaci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. W zbiorze tym określamy relację r taką, że $\{a_n\}\ r\ \{b_n\}$ wttw, gdy $\exists_k (\forall_m (m < k \Rightarrow (a_m = b_m) \wedge b_k \leq a_k) \vee \{a_n\} = \{b_n\})$. Udowodnij, że relacja r jest porządkiem liniowym.