ĆWICZENIA II

(rachunek zdań)

Zadania

1. Które z następujących wyrażeń są zdaniami? Podaj wartości logiczne tych zdań.

   (a) 2 jest liczbą pierwszą lub nie jest prawdą, że 3 jest liczbą parzystą.

   (b) Dlaczego logika jest ważna?

   (c) Liczba 4 jest dodatnia, a liczba 3 jest ujemna.

   (d) $x - y = y - x$

   (e) Jeśli $3 \cdot 2 = 1$, to $\cos(2006^o) > \frac{1}{2}$.

   (f) Matematyka jest zabawna.

2. Znajdź kontrprzykłady na następujące stwierdzenia.

   (a) Jeśli m, n są niezerowymi liczbami całkowitymi, które są nawzajem podzielne przez siebie, to $m = n$.

   (b) Dla każdej liczby naturalnej n prawdą jest, że $n^2 < 2^n$.

3. Niech p, q, r i s będą następującymi zdaniami:

   - p = wartość$(X) > 0$,
   - q = wartość$(Y) > 0$,
   - r = wyniki są wyświetlane na ekranie,
   - s = wartość(X) := wartość$(X) + 1$.

   Zapisz każde z poniższych zdań za pomocą symboliki logicznej.

   (a) Jeśli nie jest prawdą, że wartość$(X) > 0$, to wartość(X) := wartość$(X) + 1$.

   (b) Wyniki są wyświetlane na ekranie wtedy i tylko wtedy, gdy wartość$(X) > 0$.

   (c) Jeśli wartość$(X) > 0$ i wartość$(Y) > 0$, to wyniki są wyświetlane na ekranie.

4. Wykaż, że następujące wyrażenia są tautologiami. Zastosuj dwie metody: zerojedynkową i „nie wprost”.

   (a) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ - określenie implikacji za pomocą alternatywy

   (b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ - prawo de Morgana

   (c) $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to r)$ - reductio ad absurdum

   (d) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

5. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami.

   (a) $p \to [\neg p \vee q]$

   (b) $(p \to q) \to (p \to (q \vee r))$

6. Alternatywa wykluczająca XOR jest zdefiniowana za pomocą matrycy:

p	q	$p\ XOR\ q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zbuduj matryce logiczne dla zdań:

(a) $(p\ \ XOR\ \ p)\ \ XOR\ \ p$

(b) $(p\ \ XOR\ \ q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

7. Rozważ następujący zbiór zdań:

- Jeśli się nie mylę, to dzisiaj jest sobota.
- Albo dzisiaj to nie wczoraj, albo dzisiaj jest piątek.
- Nie mylę się, jeśli jesteś tutaj.
- Jeśli dzisiaj jest piątek, to dzisiaj nie jest sobota.
- Jeśli dzisiaj jest sobota, to wczoraj był piątek.

Zapisz powyższe zdania w postaci formuł rachunku zdań. Zbadaj niesprzeczność tego zbioru. Zakładając, że powyższe zdania są prawdziwe, zbadaj czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź starannie uzasadnij.

(a) Jeśli się nie mylę, to jesteś tutaj.

(b) Jeśli dzisiaj jest piątek, to nie mylę się.

(c) Jeśli się mylę, to wczoraj był piątek.

8. Podaj dowód formalny twierdzenia $(p \wedge \neg r)$ z $(q \rightarrow p)$ i $(q \wedge \neg r)$.

9. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q mamy:

(a) $p \vee q \leftrightarrow q$

(b) $p \wedge q \leftrightarrow p$.

10. Zaproponuj zdanie złożone ze zmiennych zdaniowych p, q, r, które:

(a) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie jedna z trzech zmiennych p, q, r jest prawdziwa,

(b) jest prawdziwe wttw gdy dokładnie dwie z trzech zmiennych p, q, r są prawdziwe.