ĆWICZENIA I

(algebra zbiorów)

Reguły zaliczenia przedmiotu

- odbędą się trzy sprawdziany po 45 min.:
  - sprawdzian I, **zajęcia IV**, zakres materiał: ćwiczenia I-III,
  - sprawdzian II, **zajęcia IX**, zakres materiału: ćwiczenia IV i VIII,
  - sprawdzian III, **zajęcia XIV** , zakres materiał: ćwiczenia IX i XIII,
  - **brak możliwości poprawiania sprawdzianów**,
- punkty do zdobycia:
  - sprawdziany – 3 x 16 pkt. = 48 pkt.,
- skala ocen:

ocena	pkt. od	pkt. do
2	0	23
3	24	28
3,5	29	33
4	34	38
4,5	39	43
5	44	48

- osoby, które zgromadzą mniej niż 24 pkt. będą miały możliwość zaliczenia ćwiczeń na ostatnich zajęciach (test z całego semestru).

Zadania

1. Ile elementów ma zbiór:

   (a) $A = \{x : x \text{ jest stolicą państwa leżącego w Europie w całości lub częściowo}\}$,
   (b) $B = \{x : x \text{ jest studentem Twojej grupy i } x \text{ lubi piosenki Jennifer Lopez}\}$,
   (c) $C = \{x : x \text{ jest studentem Twojej grupy i } x \text{ nie lubi używać systemu operacyjnego Windows}\}$,
   (d) $D = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ i } x \text{ jest dzielnikiem liczby 15}\}$,
   (e) $E = \{x : x \in \mathbb{N},\ x \text{ jest wielokrotnością liczby 4 i } x < 50\}$,
   (f) $F = \{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,
   (g) $G = \{3z + 1 : z \in \mathbb{Z} \text{ i } |z| < 4\}$,
   (h) $H = \emptyset$,
   (i) $I = \{\emptyset\}$,
   (j) $J = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
   (k) $K = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$?

   Ile podzbiorów ma każdy z wymienionych zbiorów?

2. Wyznacz elementy zbioru:

   (a) $A = ((-5, 6]\backslash\{-2, 3\}) \cap \mathbb{Z}$,
   (b) $B = ((-5, 6]\backslash[-2, 3)) \cap \mathbb{N}$,

(c) $C = (\{-5, 3\}\backslash[-2, 3]) \cap \mathbb{R}_+$,

(d) $D = (\{-5, 3\} \cap \mathbb{R}_+) \cup ([-2, 3] \cap \mathbb{Z}_-)$.

3. Wyznacz zbiory potęgowe zbiorów $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{a\}$, $\{0, 10, 11\}$.

4. Przez $\mathbb{Z}(n)$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez n ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Które z poniższych zależności są prawdziwe?

   (a) $\mathbb{Z}(2) \cap \mathbb{Z}(3) = \mathbb{Z}(6)$,

   (b) $\mathbb{Z}(3) \subset \mathbb{Z}(6)$,

   (c) $\mathbb{Z}(6) \cup \mathbb{Z}(3) = \mathbb{Z}(3)$,

   (d) $\mathbb{Z}(2)\backslash\mathbb{Z}(4) = \emptyset$.

5. Niech $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

   (a) Czy zbiór $\mathbb{Z}_5$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Z}_6$?

   (b) Wymień wszystkie elementy zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$.

   (c) Czy zbiory $A = (\mathbb{Z}_6\backslash\mathbb{Z}_4) \cup \mathbb{Z}_3$ i $B = \mathbb{Z}_5$ są równe?

   (d) Wyznaczyć $\mathbb{Z}_3'$ przy założeniu, że zbiorem uniwersalnym jest $\mathbb{Z}_{10}$.

6. Niech $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^* \ :\ \text{długość } (w) \leq 2\}$ i $C = \{w \in \Sigma^* \ :\ \text{długość } \geq 2\}$ oraz niech Σ^* będzie zbiorem uniwersalnym. Wyznacz:

   (a) B', $B' \cap C'$,

   (b) $A \cap C$, $A\backslash C$, $\Sigma\backslash B$,

   (c) $\mathcal{P}(\Sigma)$.

7. A i B oznaczają zbiory niepuste. Jaki jest związek między tymi zbiorami, jeśli:

   (a) $(A \cup B) \subseteq B$,

   (b) $A \subseteq (A \cap B)$,

   (c) $A \subseteq (A\backslash B)$,

   (d) $A \cup B = B$.

8. Czy istnieją zbiory A, B i C takie, że $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B)\backslash C = \emptyset$?

9. Wskaż, które ze zdań są prawdziwe, a które fałszywe. Dla każdego fałszywego zdania podaj kontrprzykład.

   (a) Jeśli $A \cap B = A \cap C$, to $B = C$.

   (b) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ dla wszystkich zbiorów A, B.

   (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ dla wszystkich zbiorów A, B, C.

10. Różnicą symetryczną dwu zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \oplus B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Dowieść, że:

    (a) $A \oplus B = B \oplus A$,

    (b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

11. Udowodnić następujące tożsamości:

    (a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

    (b) $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$,

    (c) $A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$,

    (d) $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$.

12. Udowodnić, że:

(a) $A \cap B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B' \cup C$,

(b) $(A \backslash B) \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.

13. Niech $A = \{z \in \mathbb{Z} \ : \ |z| < 3\}$ i $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ 3^n < 28\}$. Wypisz lub narysuj elementy zbioru:

(a) $\{(m, n) \in A \times B \ : \ m < n\}$,

(b) $\{(m, n) \in B \times A \ : \ m < n\}$,

(c) $\{(m, n) \in A \times B \ : \ \min\{m, n\} < 0\}$,

(d) $\{(m, n) \in B \times A$ :: $m + n$ jest liczbą pierwszą$\}$.

14. Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące równości:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(b) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

15. Korzystając z zależności $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B' \cup C$ oraz $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B' \subseteq C$ rozwiązać układy równań:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{array} \right.$, gdzie A, B, C są danymi zbiorami oraz $B \subseteq A \subseteq C$,

(b) $\left\{ \begin{array}{l} A \backslash X = B \\ X \backslash A = C \end{array} \right.$, gdzie A, B, C są danymi zbiorami oraz $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$.

16. Wyznaczyć $\bigcap_{t \in T} A_t$ oraz $\bigcup_{t \in T} A_t$ gdy:

(a) $T = \{2, 3, 4\}$, $A_t = \mathbb{Z}_t$,

(b) $T = \{1, 2, 3\}$, $A_t = [t - 3, t + 1]$.

17. Wyznaczyć $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gdy:

(a) $A_n = \mathbb{Z}_n$,

(b) $A_n = \mathbb{Z}(n)$,

(c) $A_n = [0, \frac{1}{n}]$.

18. Udowodnić, że dla dowolnych rodzin $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$:

(a) $\bigcap_t (A_t \cap B_t) = \bigcap_t A_t \cap \bigcap_t B_t$,

(b) $\bigcup_t (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_t A_t \cap \bigcup_t B_t$.