Relacje i relacje równoważności

Materiały pomocnicze do wykładu

uczelnia: **PJWSTK**
przedmiot: **Matematyka Dyskretna 1**
wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Zbiór i iloczyn kartezjański

Pojęcie zbioru

- **Zbiór** jest pojęciem pierwotnym, tzn. nie podajemy jego formalnej definicji. Intuicyjnie powiemy, że

  zbiór jest kolekcją pewnych obiektów.

- Obiekty, które należą do pewnego zbioru nazywamy **elementami** tego zbioru. Pojęcie elementu zbioru również jest pojęciem pierwotnym.
- Zbiory będziemy oznaczać dużymi literami A, B, X a ich elementy małymi a,b,x itp..

Elementy zbioru

- Zdanie „element a należy do zbioru A” (lub „a jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \in A.$$

- Zdanie „element a nie należy do zbioru A” (lub „a nie jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \notin A.$$

Iloczyn kartezjański

Anastacia,

Maria Carey,

Shakira

1

2

3

(Anastacia,1); (Anastacia,2); (Anastacia,3);

(Maria Carey,1); (Maria Carey, 2); (Maria Carey,3);

(Shakira,1); (Shakira, 2); (Shakira,3)

iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański

Iloczynem (produktem) kartezjańskim zbiorów X i Y, oznaczanym przez $X \times Y$, nazywamy zbiór złożony z wszystkich par uporządkowanych (x,y) takich, że $x \in X$ i $y \in Y$,

$$(x,y) \in X \times Y \text{ wttw } x \in X \text{ i } y \in Y.$$

UWAGA: $(a,b) \neq (b,a)$

Przykład

X=N={0,1,2,3,...}, Y={y: $1 \le y \le 2$}

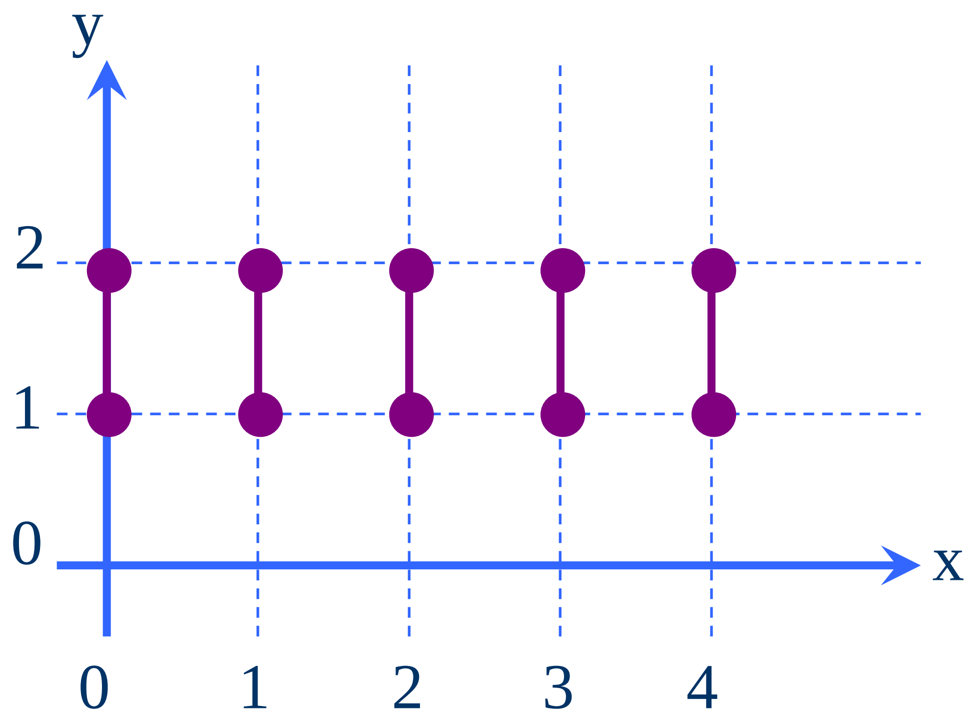
X´Y={(x,y) : x $\in$ N i $1 \le y \le 2$}

(0,1) $\in$ X´Y, (1,3/2) $\in$ X´Y, (2,2) $\in$ X´Y

(1,1/2) $\notin$ X´Y

Przykład

X=N={0,1,2,3,...}, Y={y: 1≤y≤2}



Pojęcie relacji

Intuicje

- **Relacja** – zależność (funkcja, stosunek, związek, powiązanie, więź) między dwoma bądź wieloma elementami.

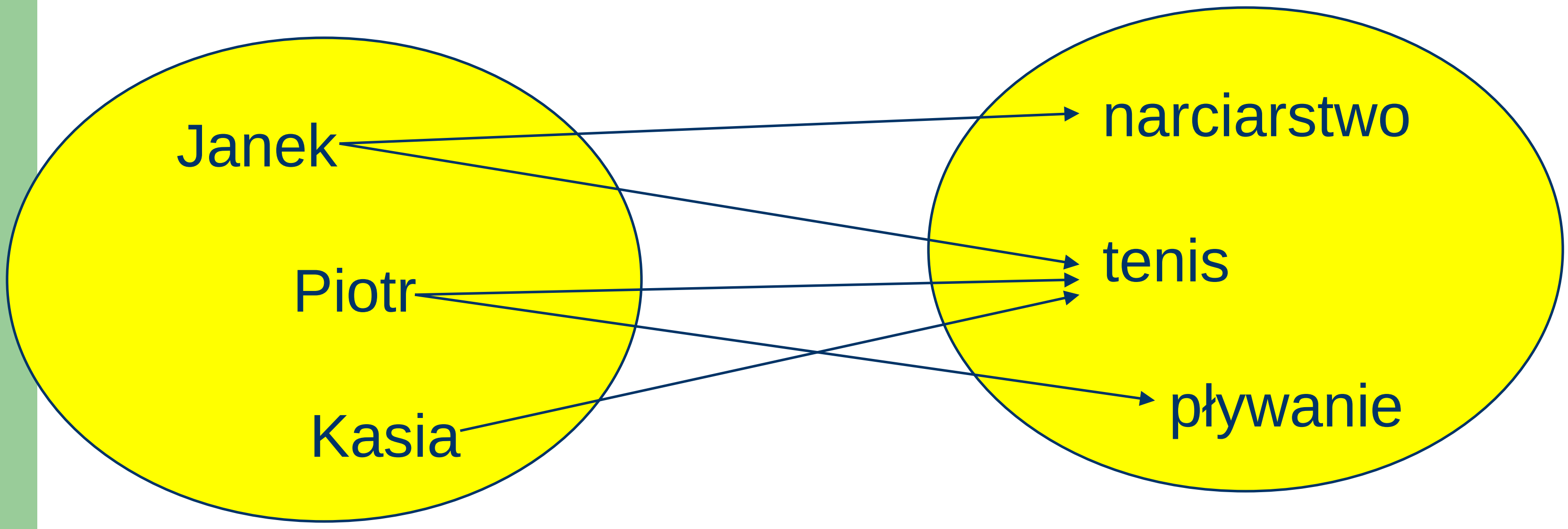
- Własność przysługująca pewnym elementom.

- Językiem relacji można opisywać wiele zjawisk życia codziennego:
  relacje rodzinne, relacje społeczne (międzyludzkie), relacje emocjonalne.

Przykład

- Niech A=zbiór ludzi, B=zbiór sportów

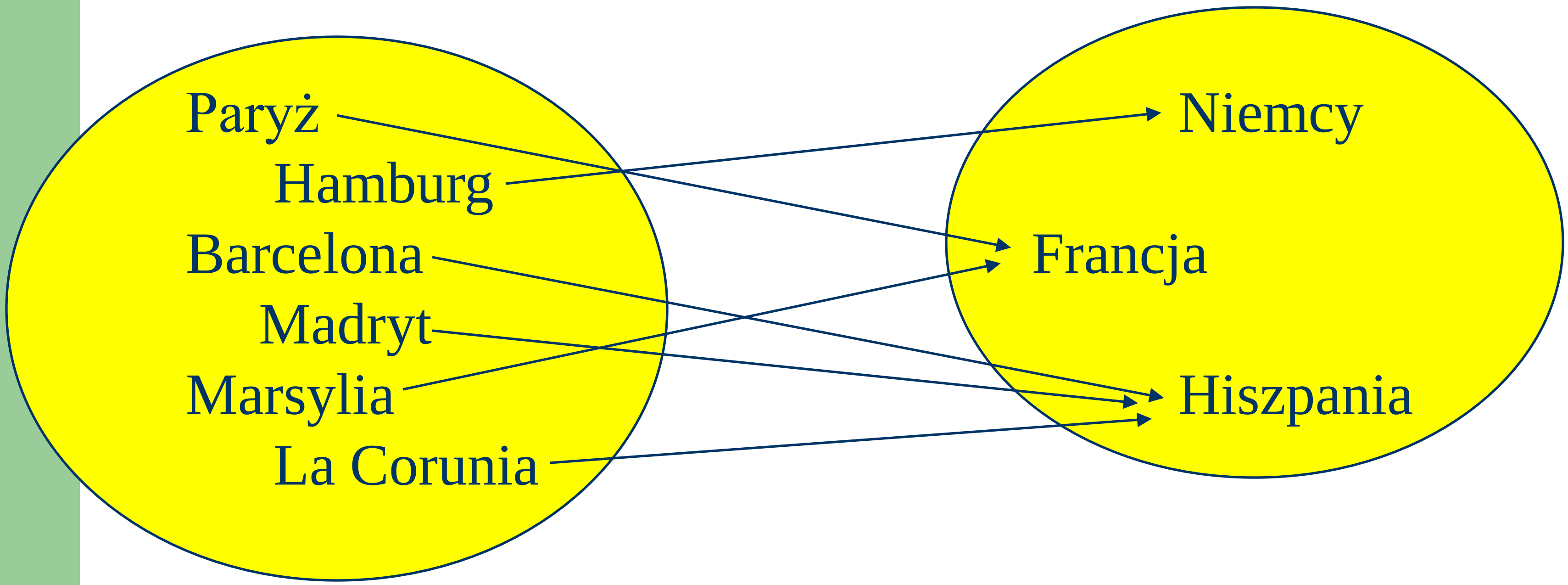
  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : człowiek a lubi uprawiać sport b}



Przykład

- Niech A=zbiór miast oraz B=zbiór państw

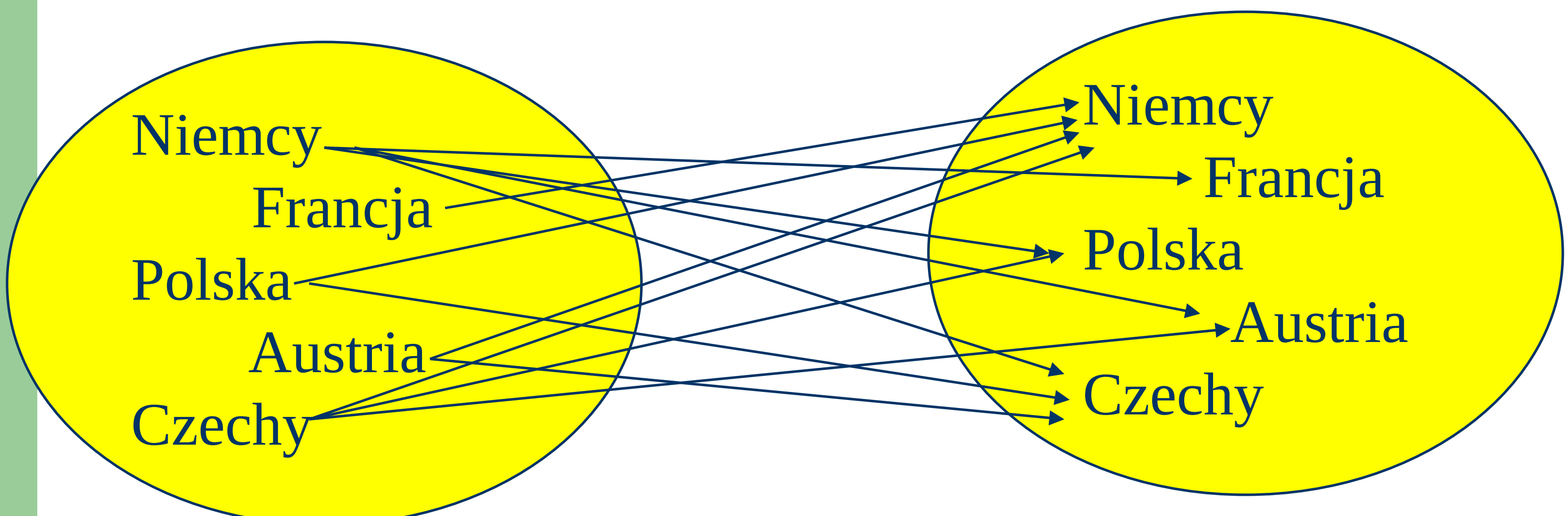
  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : miasto a leży w państwie b}



Przykład

- Niech A=B=zbiór państw

  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : państwo a graniczy z państwem b}

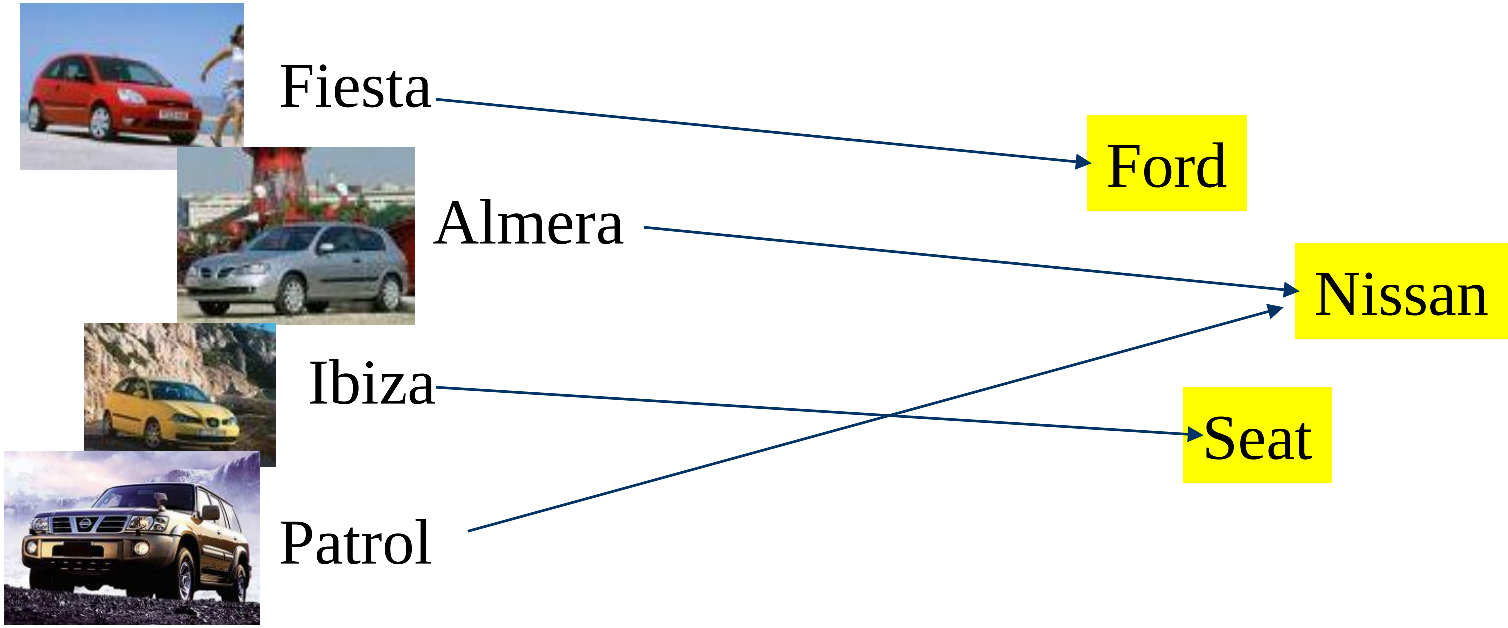


Przykład

- Niech A=zbiór modeli samochodów

  B=zbiór marek samochodów

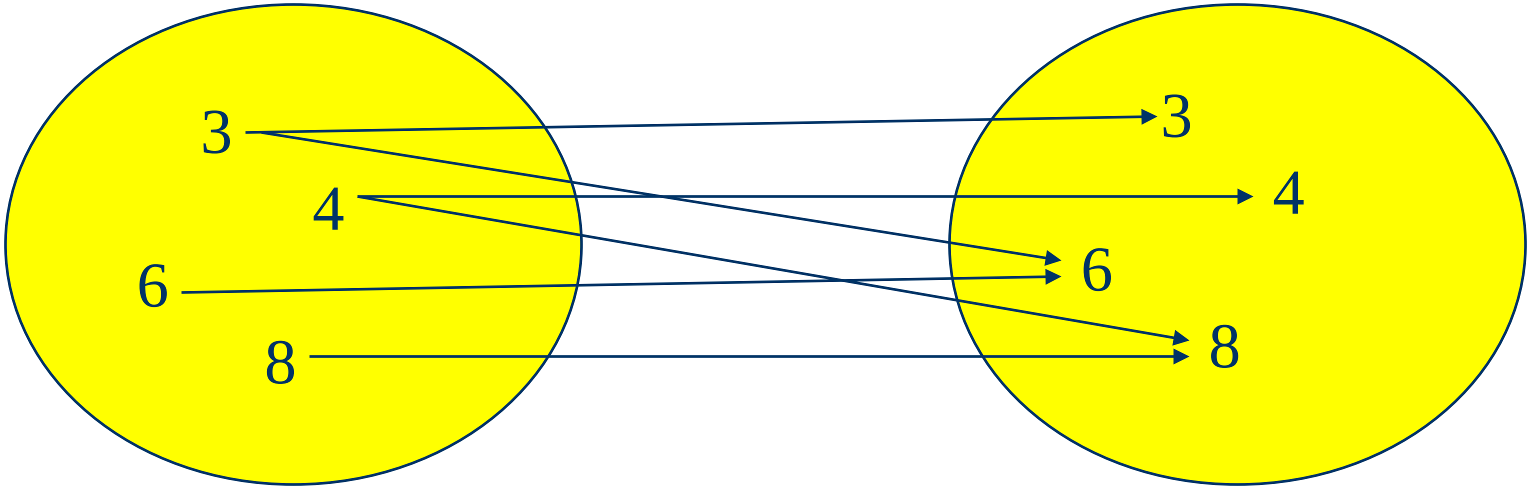
  r = {(a,b)∈A×B : a jest modelem marki b}



Przykład

- Niech A=B={3,4,6,8}

  r = {(a,b)∈A×B : a jest dzielnikiem liczby b}



Definicja relacji

- Niech X i Y będą dwoma zbiorami.

  Dowolny podzbiór r produktu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy relacją dwuargumentową (binarną) w $X \times Y$.

- Jeśli $X=Y$, to mówimy, że r jest relacją binarną w X.

Definicja relacji

Jeśli

$$(x,y) \in r$$

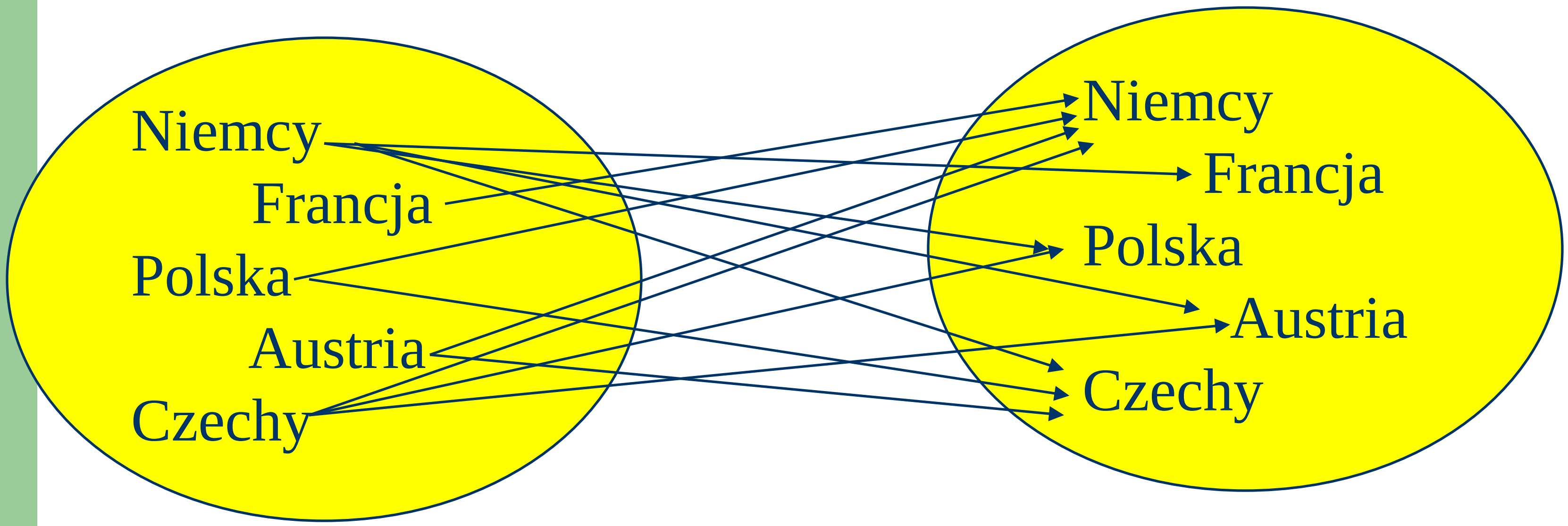
to piszemy

$$x \; r \; y$$

i mówimy, że relacja r zachodzi między elementami x i y.

Sposoby reprezentacji

- Niech A=B={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : państwo a graniczy z państwem b}



Sposoby reprezentacji:
wypisanie par należących do relacji

- Niech A=B={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : państwo a graniczy z państwem b}

r = {(Niemcy, Francja), (Niemcy,Polska),
(Niemcy, Austria), (Niemcy, Czechy), (Francja, Niemcy),
(Polska, Niemcy), (Polska, Czechy), (Austria, Niemcy),
(Austria, Czechy), (Czechy, Niemcy), (Czechy, Polska),
(Czechy, Austria)}

Sposoby reprezentacji:
tabelka (macierz)

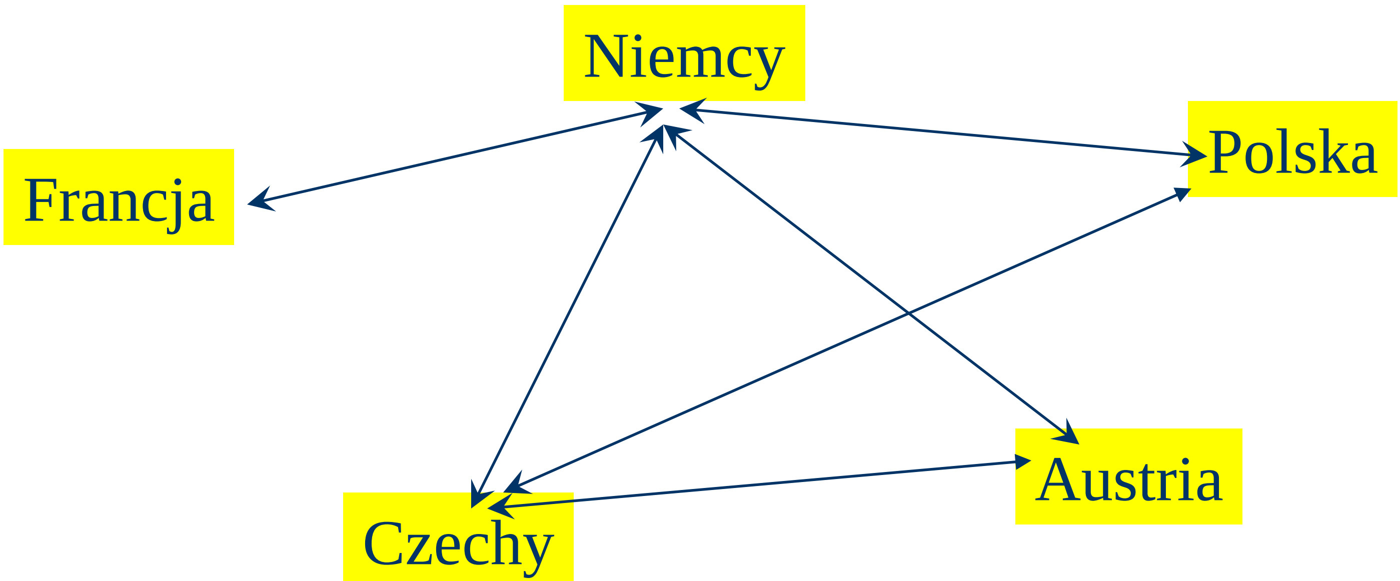
- Niech A=B={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : państwo a graniczy z państwem b}

	Niemcy	Francja	Polska	Austria	Czechy
Niemcy	-	+	+	+	+
Francja	+	-	-	-	-
Polska	+	-	-	-	+
Austria	+	-	-	-	+
Czechy	+	-	+	+	-

Sposoby reprezentacji:
graf

- Niech A=B={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}

  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : państwo a graniczy z państwem b}



Dziedzina

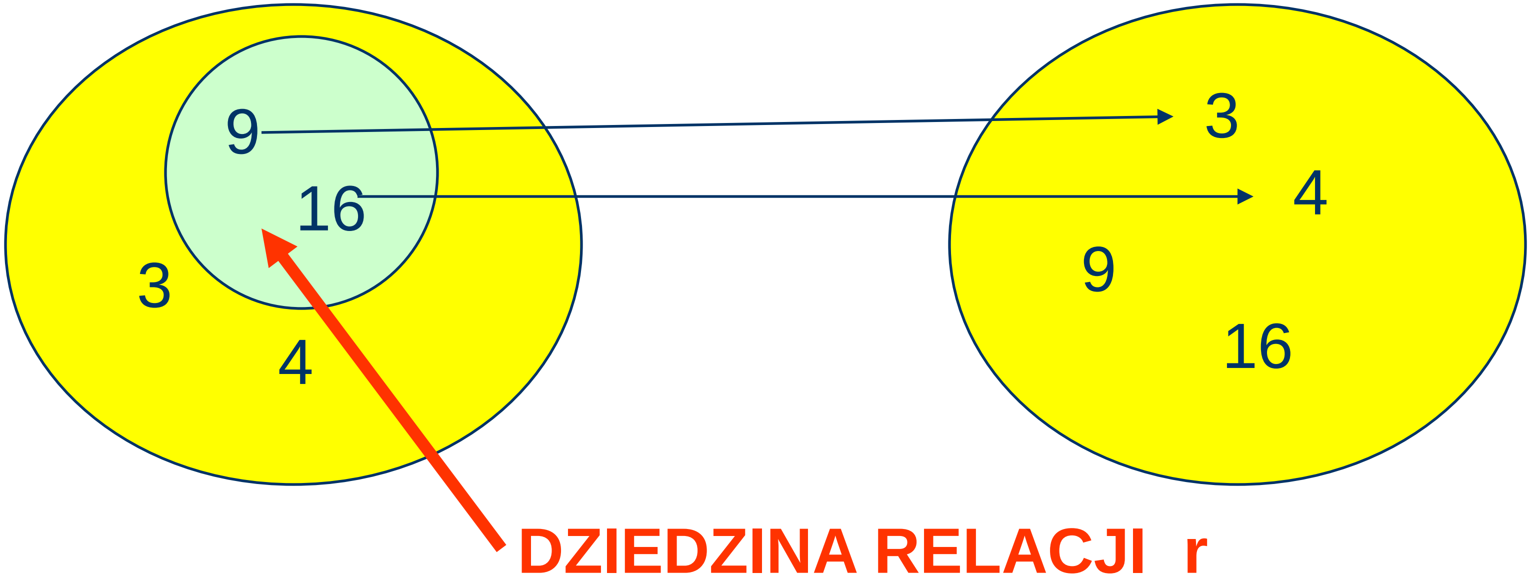
Dziedziną relacji $r \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $D(r)$ tych $x \in X$, dla których istnieje $y \in Y$, taki że $(x,y) \in r$:

$$D(r)=\{x \in X : \text{istnieje } y \in Y \text{ dla którego } (x,y) \in r\}.$$

Dziedzina

- Niech A=B={3,4,9,16}

  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : a jest kwadratem liczby b}



Przeciwdziedzina

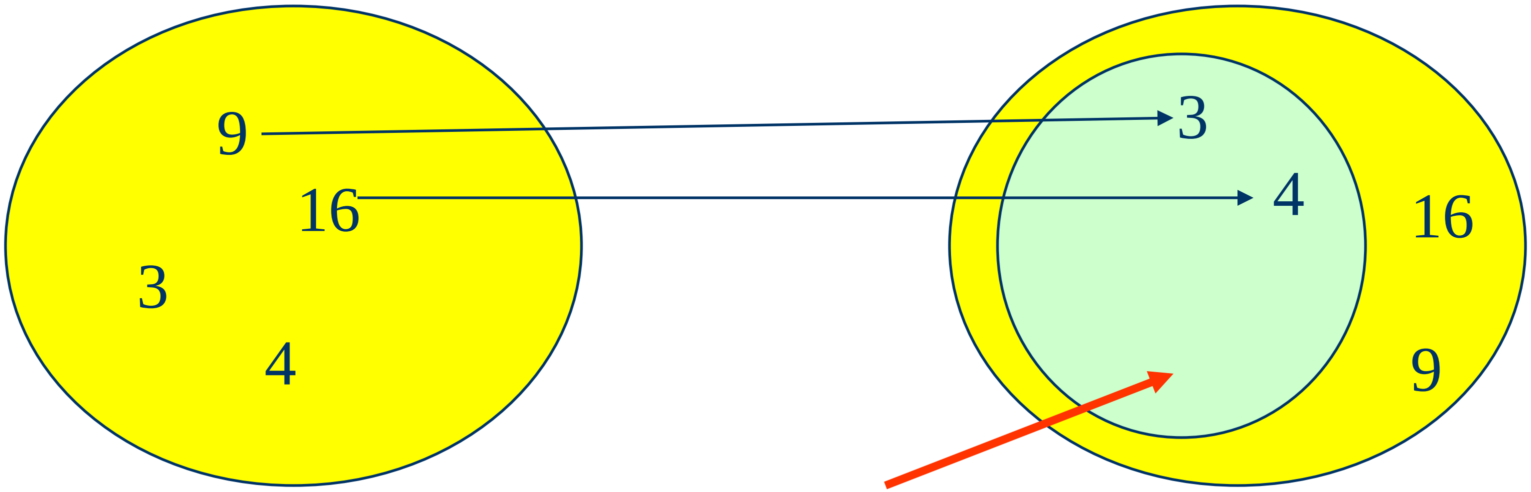
Przeciwdziedziną relacji $r \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $D^*(r)$ tych $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$, takie że $(x,y) \in r$:

$$D^*(r)=\{y \in Y : \text{istnieje } x \in X \text{ dla którego } (x,y) \in r\}.$$

Przeciwdziedzina

- Niech A=B={3,4,9,16}

  r = {(a,b)$\in$A$\times$B : a kwadratem liczby b}



PRZECIWDZIEDZINA RELACJI r

Przykłady relacji

Relacje określone w zbiorze liczb rzeczywistych i całkowitych

- x r y wttw $x \leq y$,
- x r y wttw $x \neq y$,
- x r y wttw $x+y<10$,
- x r y wttw $x=y$.

Przykłady zastosowania relacji w definiowaniu programów

Program1

```
begin
    z:=x; y:=1;
    while z-y≥0
    do
        z:=z-y;
        y:=y+2
    od
end
```

Przykłady zastosowania relacji w definiowaniu programów

Program2

```
begin
    z:=0;
    while z≠y
    do
        z:=z+1;
        x:=x+1
    od
end
```

Relacja modulo

Niech p będzie ustaloną liczbą całkowitą, większą niż 1. Weźmy liczby całkowite m i n. Mówimy, że

liczba m przystaje do liczby n modulo p

i piszemy

$$m \equiv n \pmod{p},$$

gdy różnica (m-n) jest wielokrotnością p.

Relacja modulo c.d.

- $7 \equiv 2 \pmod{5}$, bo 7-2 jest podzielne przez 5,
- $12 \equiv 22 \pmod{10}$, bo 12-22 jest podzielne przez 10.

Arytmetyka modularna jest używana między innymi w kryptografii (szyfr RSA - Ronald Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman).

Relacje określone w zbiorze programów

Program P1 jest w relacji r z programem P2 wttw wartość zmiennej x po wykonaniu programu P1 jest taka sama jak wartość zmiennej x po wykonaniu programu P2 dla tych samych danych początkowych.

Relacje określone w zbiorze programów

Czy program P1 jest w relacji r z programem P2?

P1(k) = { x:=k } dla $k \in Z$,

P2(k) = { x:=$\sqrt{k^2}$ } dla $k \in Z$.

Relacje określone w zbiorze programów

Niech A={0,1,2,3}, B=N.

Czy program P1 jest w relacji r z programem P2?

P1 = { y:=random(A); **if** y jest liczbą parzystą
then x:=y+1 **else** x:=y-1 },

P2 = {y:=random(B); x:=y mod 4 }.

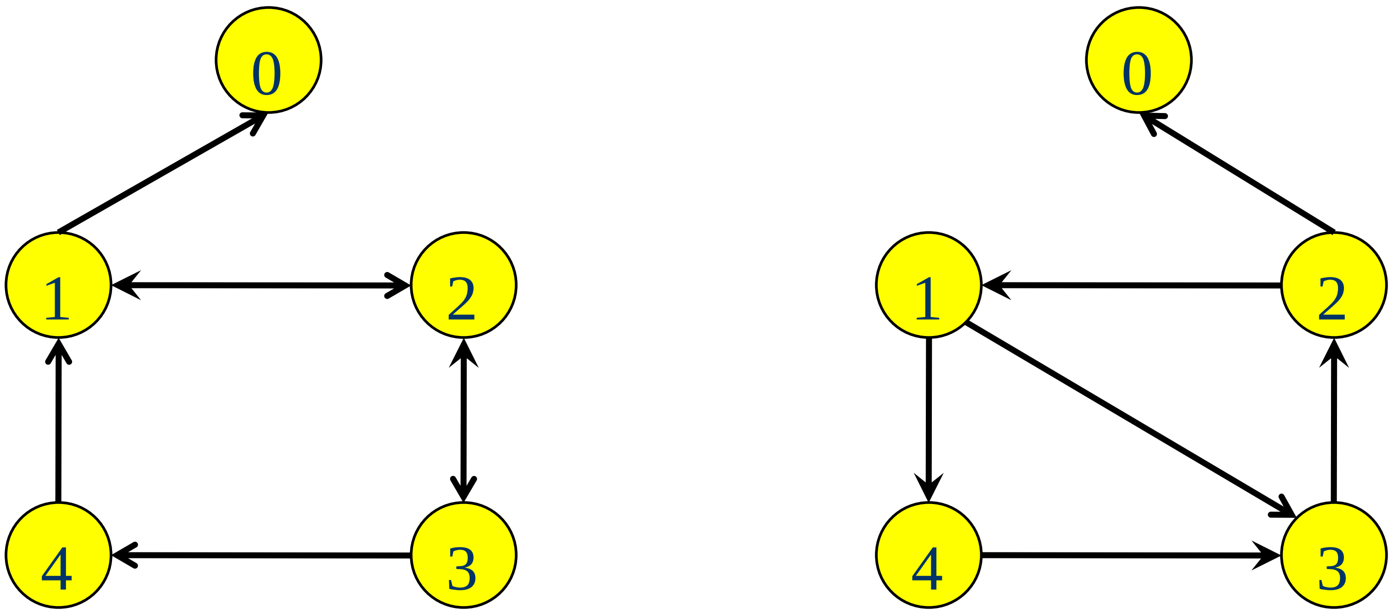
gdzie random(X) jest akcją polegającą na wylosowaniu dowolnej liczby ze zbioru X.

Relacje określone w zbiorze automatów

Automat A1 jest w relacji r z automatem A2 wttw zbiór stanów osiągalnych automatu A1 jest taki sam jak zbiór stanów osiągalnych automatu A2 dla tych samych stanów początkowych.

Relacje określone w zbiorze automatów

Czy dla poniższych automatów zachodzi (A1,A2)$\in$r?



Rodzaje relacji

Relacja zwrotna

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

zwrotną

wttw dla każdego $x \in X$,

$$(x,x) \in r.$$

Relacja zwrotna

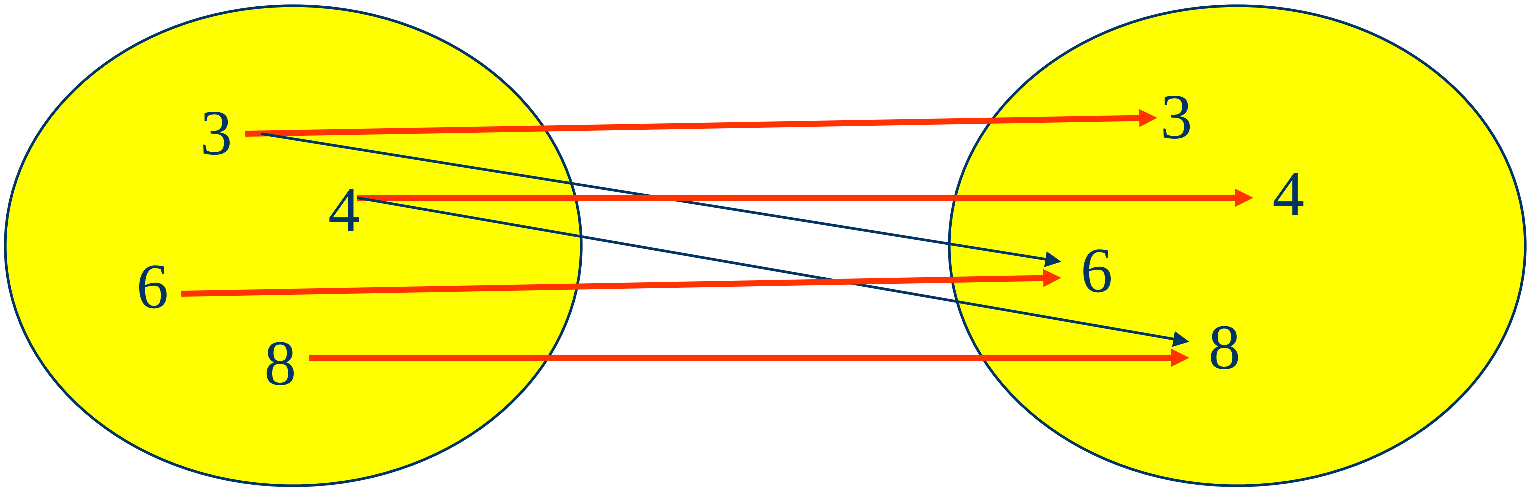
Inaczej: r jest zwrotna wttw

$$\{(x,x) : x \in X\} \subseteq r.$$

Relacja zwrotna

- Niech A={3,4,6,8}

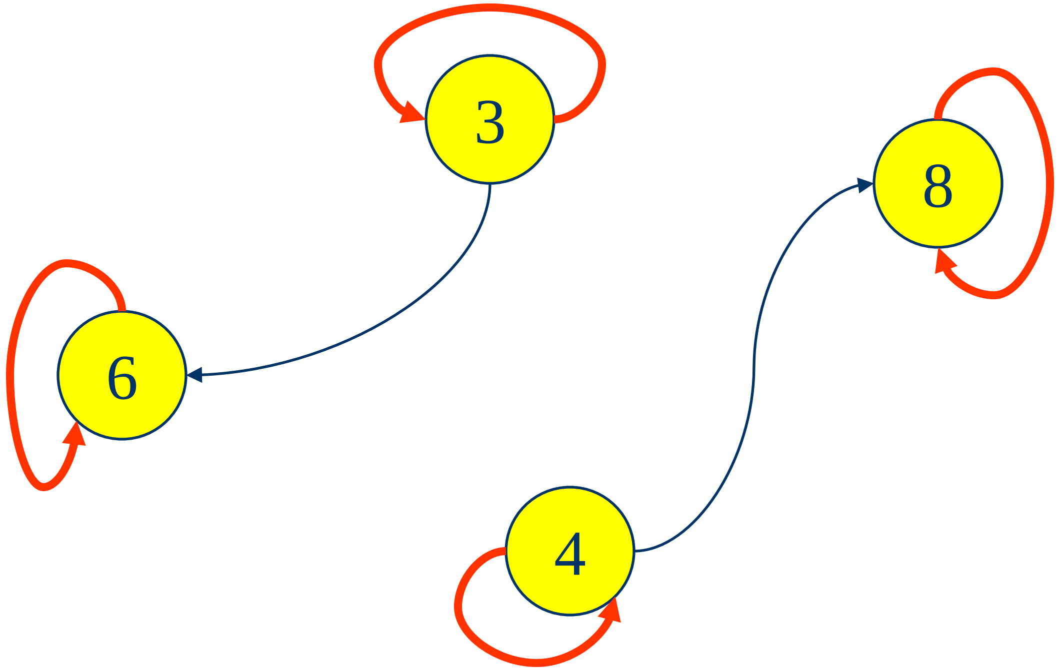
  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest dzielnikiem liczby b}



Relacja zwrotna

- Niech A={3,4,6,8}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest dzielnikiem liczby b}



Relacja zwrotna

- Niech $A=\{3,4,6,8\}$

  $r = \{(a,b) \in A^2$: a jest dzielnikiem liczby b$\}$

Relacja jest zwrotna, bo dla każdego $a \in A$, $(a,a) \in r$

$$(3,3) \in r,\ (4,4) \in r,\ (6,6) \in r,\ (8,8) \in r$$

Relacja przeciwzwrotna

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

przeciwzwrotną

wttw dla każdego $x \in X$,

$(x,x) \notin r.$

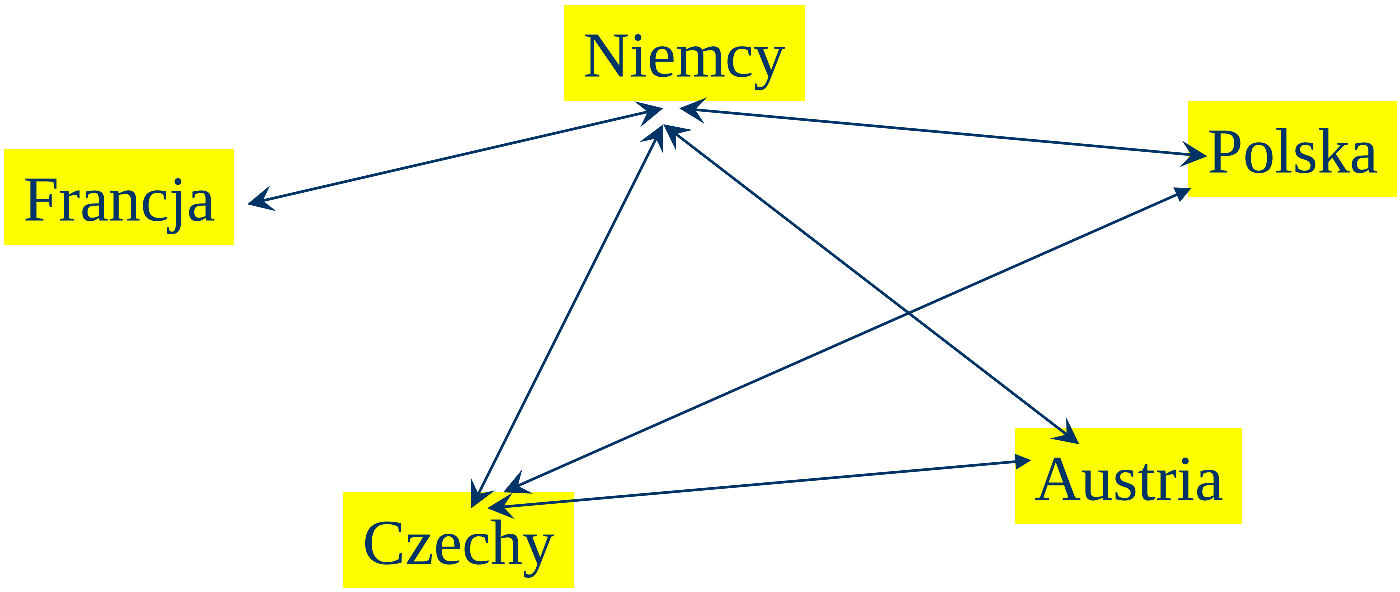
Relacja przeciwzwrotna

Inaczej: r jest przeciwzwrotna wttw

$$\{(x,x) : x \in X\} \cap r = \emptyset.$$

Relacja przeciwzwrotna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A^2 : państwo a graniczy z państwem b}



Relacja przeciwzwrotna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A^2 : państwo a graniczy z państwem b}

	Niemcy	Francja	Polska	Austria	Czechy
Niemcy	-	+	+	+	+
Francja	+	-	-	-	-
Polska	+	-	-	-	+
Austria	+	-	-	-	+
Czechy	+	-	+	+	-

Relacja przeciwzwrotna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in A^2$: państwo a graniczy z państwem b}

Relacja jest przeciwzwrotna, bo dla każdego a$\in$A,

$$(a,a) \notin r$$

(Niemcy, Niemcy) $\notin$ r, (Francja, Francja) $\notin$ r,
(Polska, Polska) $\notin$ r, (Austria,Austria) $\notin$ r,
(Czechy, Czechy) $\notin$ r

Relacja symetryczna

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

symetryczną

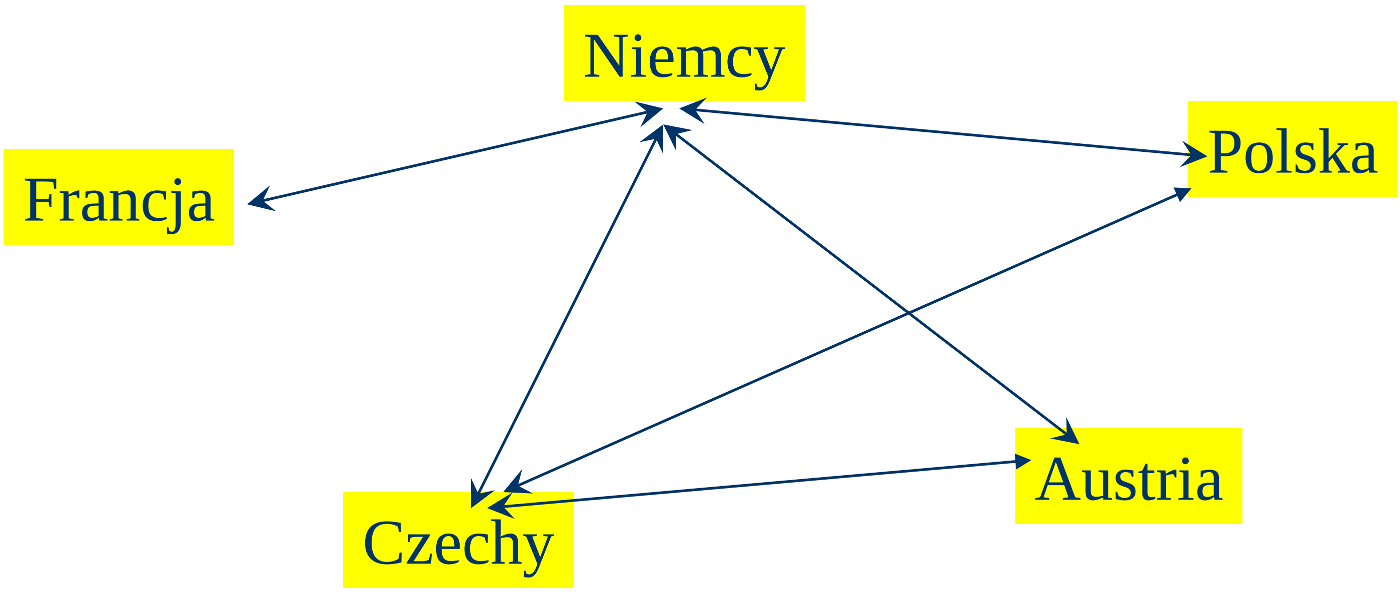
wttw dla dowolnych $x,y \in X$,

jeśli $(x,y) \in r$, to $(y,x) \in r$.

Relacja symetryczna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : państwo a graniczy z państwem b}



Relacja symetryczna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  r = {(a,b)$\in$A^2 : państwo a graniczy z państwem b}

	Niemcy	Francja	Polska	Austria	Czechy
Niemcy	-	+	+	+	+
Francja	+	-	-	-	-
Polska	+	-	-	-	+
Austria	+	-	-	-	+
Czechy	+	-	+	+	-

Relacja symetryczna

- Niech A={Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy}
  $r = \{(a,b)\in A^2$: państwo a graniczy z państwem b$\}$

Relacja jest symetryczna, bo dla każdego a, b $\in$ A,

jeśli a graniczy z b, to b graniczy z a

tzn. jeśli $(a,b)\in r$, to $(b,a)\in r$

Relacja przeciwsymetryczna

Relację r nazwiemy

przeciwsymetryczną (asymetryczną)

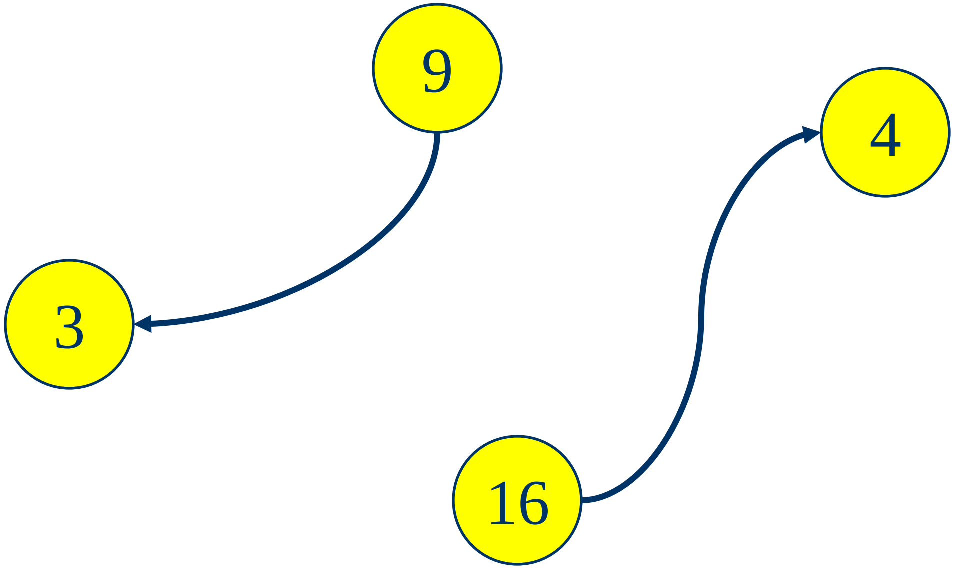
wttw dla dowolnych $x,y \in X$

jeśli $(x,y) \in r$, to $(y,x) \notin r$.

Relacja przeciwsymetryczna

- Niech A={3,4,9,16}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest kwadratem liczby b}



Relacja przeciwsymetryczna

- Niech A={3,4,9,16}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest kwadratem liczby b}

	3	4	9	16
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
9	+	-	-	-
16	-	+	-	-

Relacja przeciwsymetryczna

- Niech $A=\{3,4,9,16\}$

  $r = \{(a,b)\in A^2 : a \text{ jest kwadratem liczby } b\}$

Relacja jest przeciwsymetryczna, bo dla każdego $a,b\in A$,

jeśli a jest kwadratem liczby b, to
b nie jest kwadratem liczby a

tzn. jeśli $(a,b)\in r$, to $(b,a)\notin r$

Relacja antysymetryczna

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

antysymetryczną

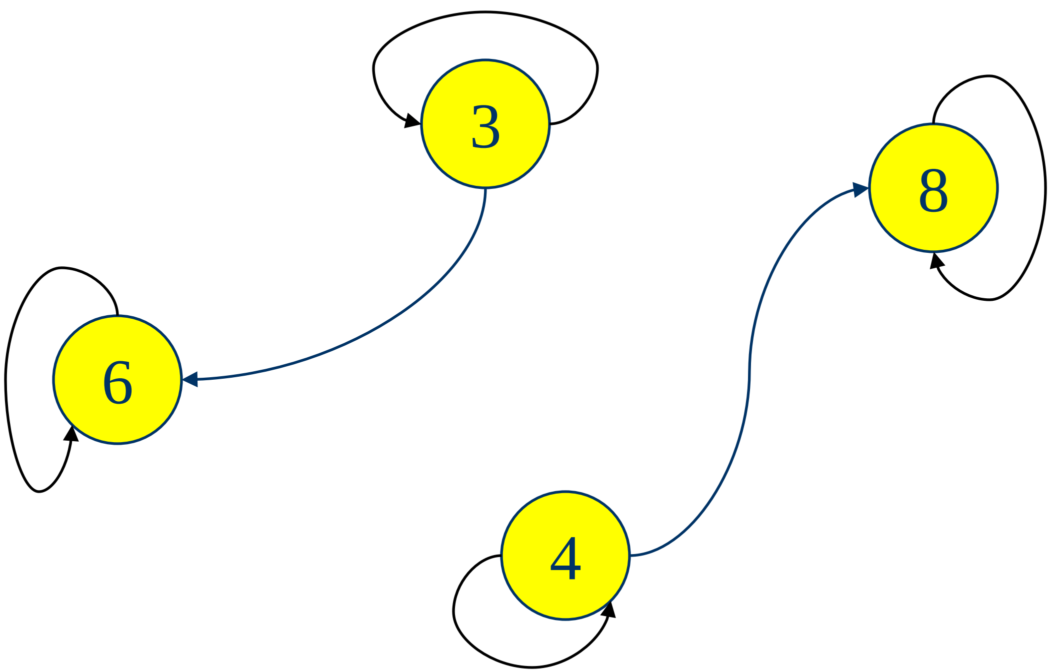
wttw dla dowolnych $x,y \in X$,

jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,x) \in r$, to $x=y$.

Relacja antysymetryczna

- Niech A={3,4,6,8}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest dzielnikiem liczby b}



Relacja antysymetryczna

- Niech A={3,4,6,8}

  r = {(a,b)$\in A^2$: a jest dzielnikiem liczby b}

	3	4	6	8
3	+	-	+	-
4	-	+	-	+
6	-	-	+	-
8	-	-	-	+

Relacja antysymetryczna

- Niech $A=\{3,4,6,8\}$

  $r = \{(a,b)\in A^2 : a \text{ jest dzielnikiem liczby } b\}$

Relacja jest antysymetryczna, bo dla każdego $a,b\in A$,

jeśli a jest dzielnikiem liczby b i

b jest dzielnikiem liczby a, to $a=b$

tzn. jeśli $(a,b)\in r$ i $(b,a)\in r$, to $a=b$

Relacja antysymetryczna

- Niech A={-3,3,4,6,8}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest dzielnikiem liczby b}

To nie jest relacja antysymetryczna !!!

(-3,3) $\in$ r i (3,-3) $\in$ r i 3 $\neq$ -3

	-3	3	4	6	8
-3	+	+	-	+	-
3	+	+	-	+	-
4	-	-	+	-	+
6	-	-	-	+	-
8	-	-	-	-	+

Relacja przechodnia

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

przechodnią

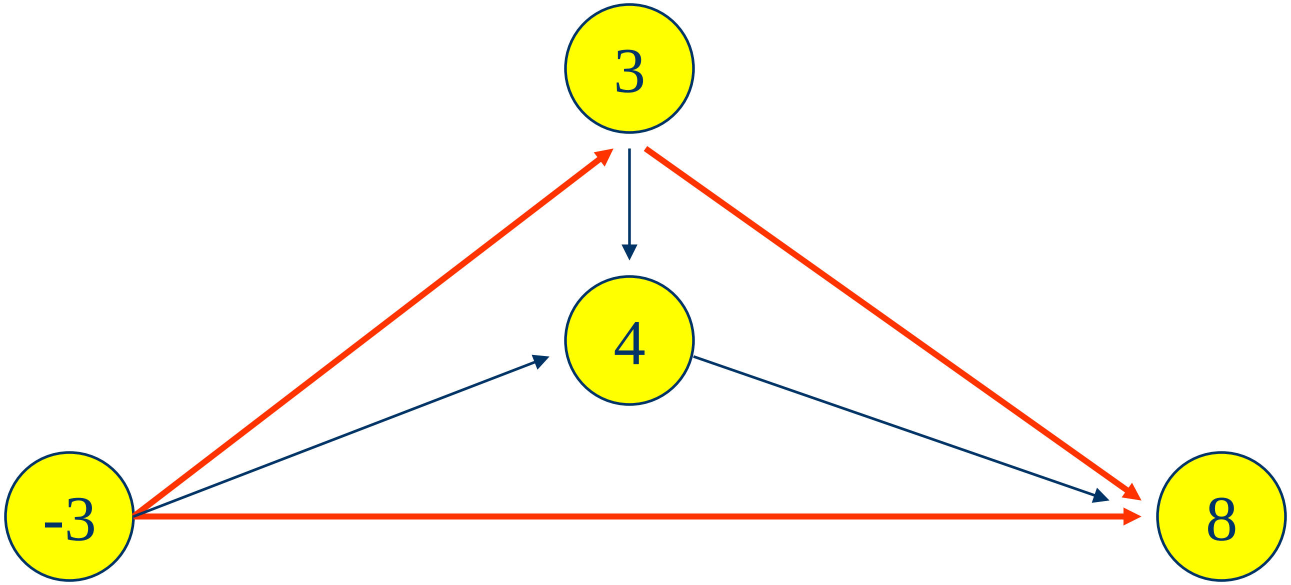
wttw dla dowolnych $x,y,z \in X$,

jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,z) \in r$, to $(x,z) \in r$.

Relacja przechodnia

- Niech A={-3,3,4,8}

  r = {(a,b)$\in$A^2: a jest mniejsze od b}



Relacja przechodnia

- Niech $A=\{-3,3,4,8\}$

  $r = \{(a,b)\in A^2$: a jest mniejsze od b$\}$

Relacja jest przechodnia, bo dla każdego $a,b,c\in A$,

jeśli a jest mniejsze od b i

b jest mniejsze od c, to a jest mniejsze od c

tzn. jeśli $(a,b)\in r$ i $(b,c)\in r$, to $(a,c)\in r$

Relacja spójna

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy

spójną

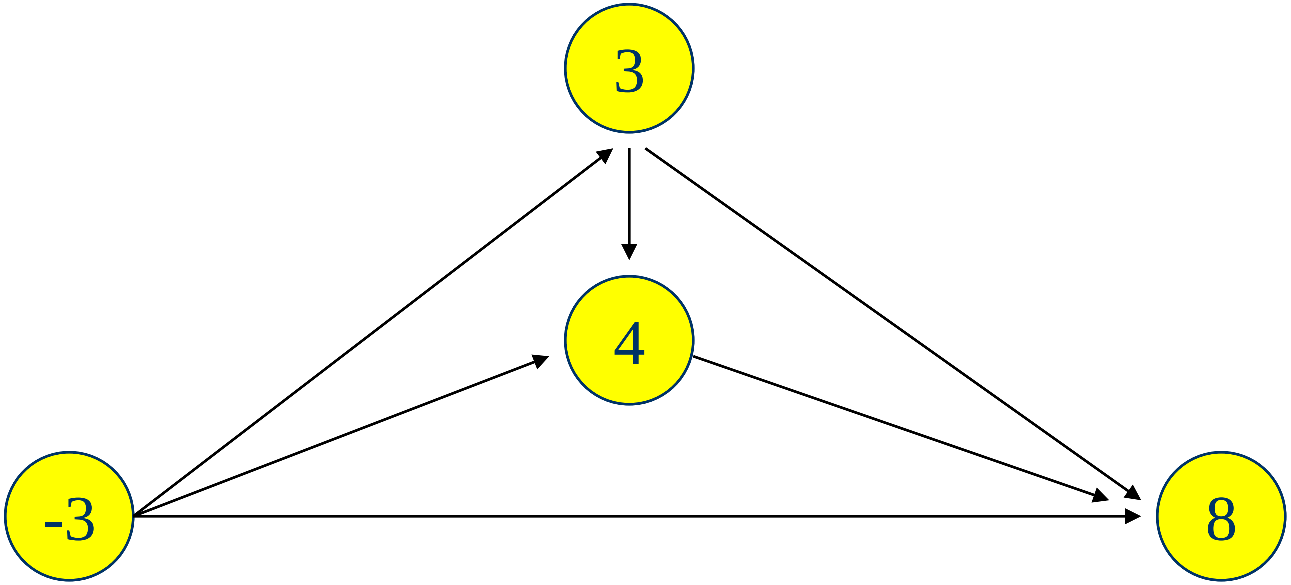
wttw dla dowolnych $x,y \in X$,

$$(x,y) \in r \text{ lub } (y,x) \in r \text{ lub } x=y.$$

Relacja spójna

- Niech A={-3,3,4,8}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a jest mniejsze od b}



Relacja spójna

- Niech $A=\{-3,3,4,8\}$

  $r = \{(a,b)\in A^2$: a jest mniejsze od b$\}$

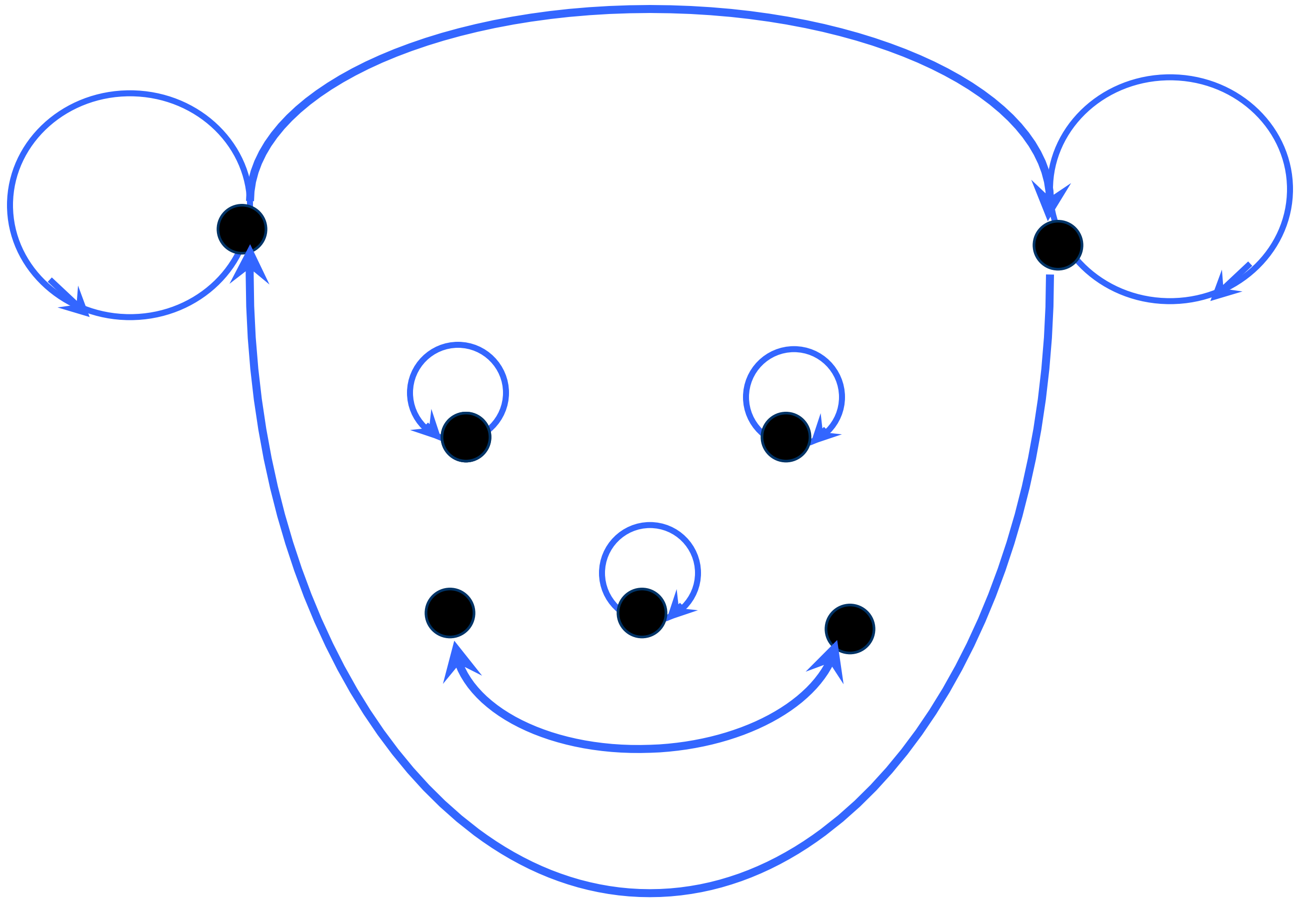
Relacja jest spójna, bo dla każdego $a,b\in A$,

albo a jest mniejsze od b albo b jest mniejsze od a

albo $a=b$

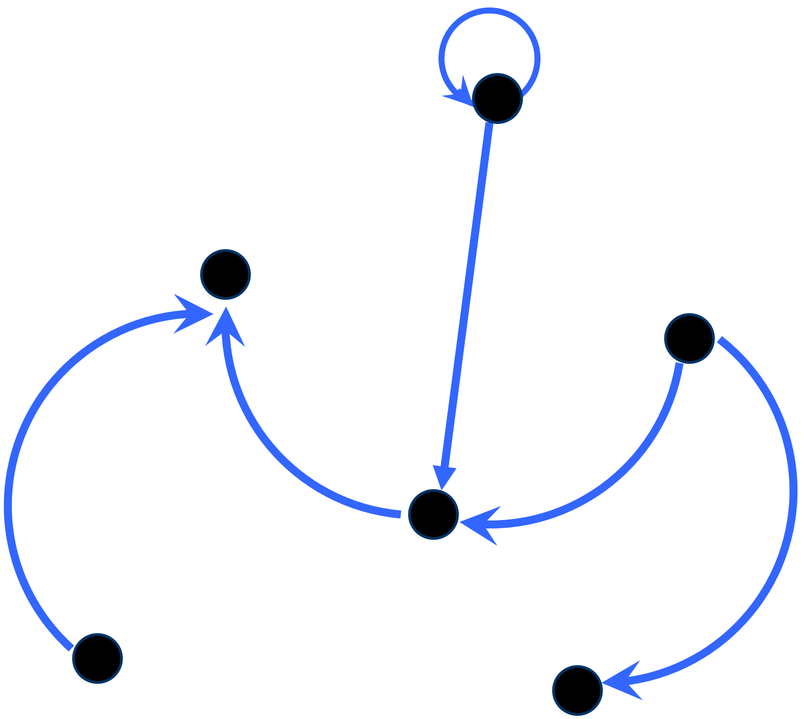
tzn. albo $(a,b)\in r$ albo $(b,a)\in r$ albo $a=b$

Jakie własności posiada ta relacja?



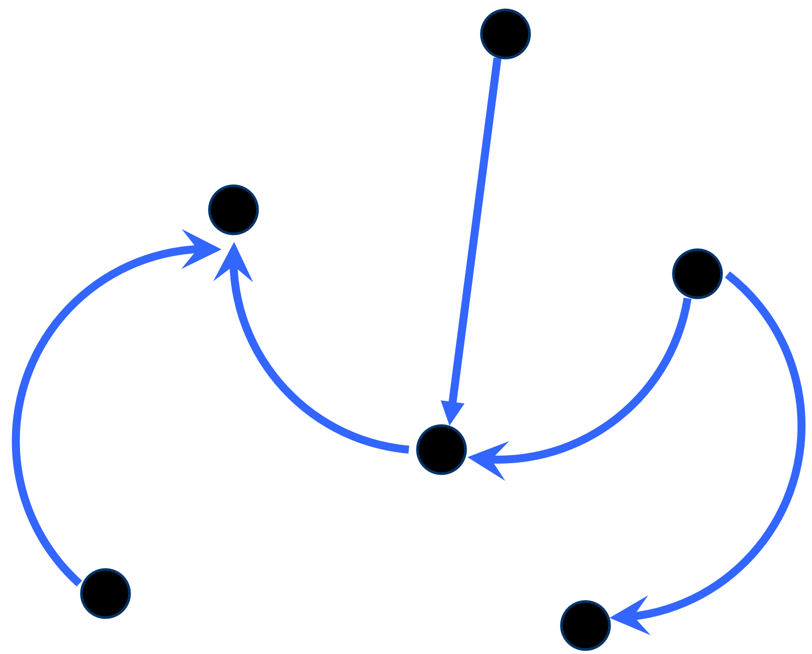
Dodaj lub usuń jedną krawędź tak, aby otrzymać relację ....

......przeciwsymetryczną



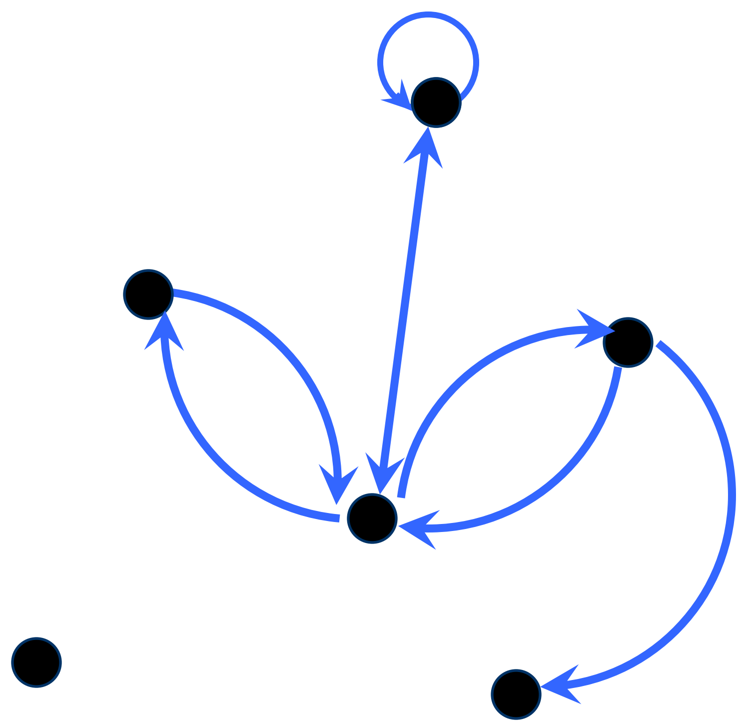
Dodaj lub usuń jedną krawędź tak, aby otrzymać relację ....

......przeciwsymetryczną



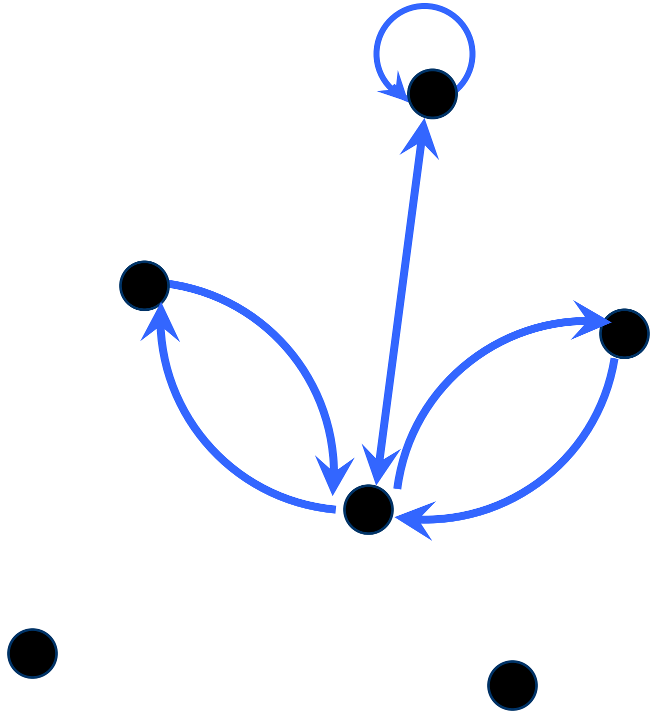
Dodaj lub usuń jedną krawędź tak, aby otrzymać relację ....

......symetryczną



Dodaj lub usuń jedną krawędź tak, aby otrzymać relację ....

......symetryczną



Własności relacji - zadania

Jakie własności posiada relacja?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze liczb całkowitych taką, że

$$m \; r \; n \text{ wttw } \min\{x,y\}=x.$$

Jakie własności posiada relacja?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze liczb całkowitych taką, że

$$m \; r \; n \text{ wttw } m \equiv n \pmod 5.$$

Jakie własności posiada relacja?

Relacja jest:

- zwrotna, bo dla każdego całkowitego m, m-m jest podzielne przez 5,

Jakie własności posiada relacja?

Relacja jest:

- symetryczna, bo dla każdego całkowitego m i n, jeśli m-n jest podzielne przez 5, to
  n-m=-(m-n) też jest podzielne przez 5,

Jakie własności posiada relacja?

Relacja jest:

- przechodnia, bo dla każdego całkowitego m, n, s, jeśli $m-n=5k1$ i $n-s=5k2$ dla $k1,k2\in Z$, to $m-s=m-n+n-s=5k1+5k2=5(k1+k2)$ dla $k1,k2\in Z$, (jeśli m-n jest podzielne przez 5 i jeśli n-s jest podzielne przez 5, to jeśli m-s jest podzielne przez 5)

Jakie własności posiada relacja?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze programów taką, że program P1 jest w relacji r z programem P2 wttw wartość zmiennej x po wykonaniu programu P1 jest taka sama jak wartość zmiennej x po wykonaniu programu P2 dla tych samych danych początkowych.

Jakie własności posiada relacja?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze automatów taką, że automat A1 jest w relacji r z automatem A2 wttw zbiór stanów osiągalnych automatu A1 jest taki sam jak zbiór stanów osiągalnych automatu A2 dla tych samych stanów początkowych.

Algebra relacji

Suma, iloczyn i różnica relacji

Jeśli r_1 i r_2 są dwiema relacjami binarnymi w $X \times Y$, to

$(x,y) \in r_1 \cup r_2$ wttw $(x,y) \in r_1$ lub $(x,y) \in r_2$,

$(x,y) \in r_1 \cap r_2$ wttw $(x,y) \in r_1$ i $(x,y) \in r_2$,

$(x,y) \in r_1 \setminus r_2$ wttw $(x,y) \in r_1$ i $(x,y) \notin r_2$.

Relacja pusta

Relację binarną $r \subseteq X \times Y$ nazywamy

pustą

wttw dla dowolnych $x \in X$, $y \in Y$

$$(x,y) \notin r.$$

Relacja pusta

- Niech A=zbiór liczb rzeczywistych

  $r = \{(a,b) \in A^2 : |ab| < 0\}$

Łatwo zauważyć, że $r = \emptyset$.

Relacja pełna

Relację binarną $r \subseteq X \times Y$ nazywamy

pełną

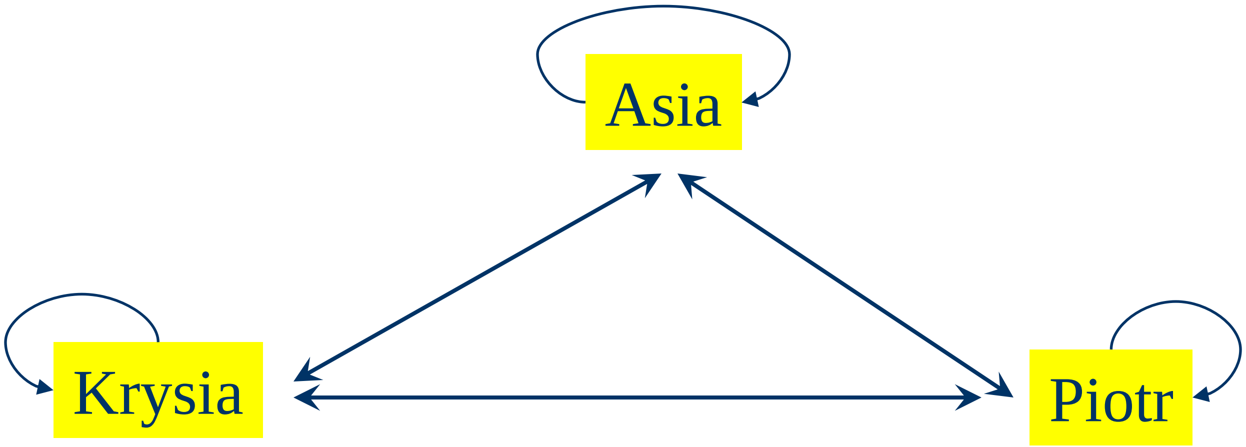
wttw dla dowolnych $x \in X$, $y \in Y$

$$(x,y) \in r.$$

Relacja pełna

- Niech A={Asia, Krysia, Piotr}

  r = {(a,b)$\in$A^2 : a lubi b}



Relacja odwrotna

Niech r będzie relacją binarną w $X \times Y$. Relacją

odwrotną

do relacji r nazywamy relację r^{-1} określoną w $Y \times X$ taką, że dla dowolnych $x \in X$ i $y \in Y$,

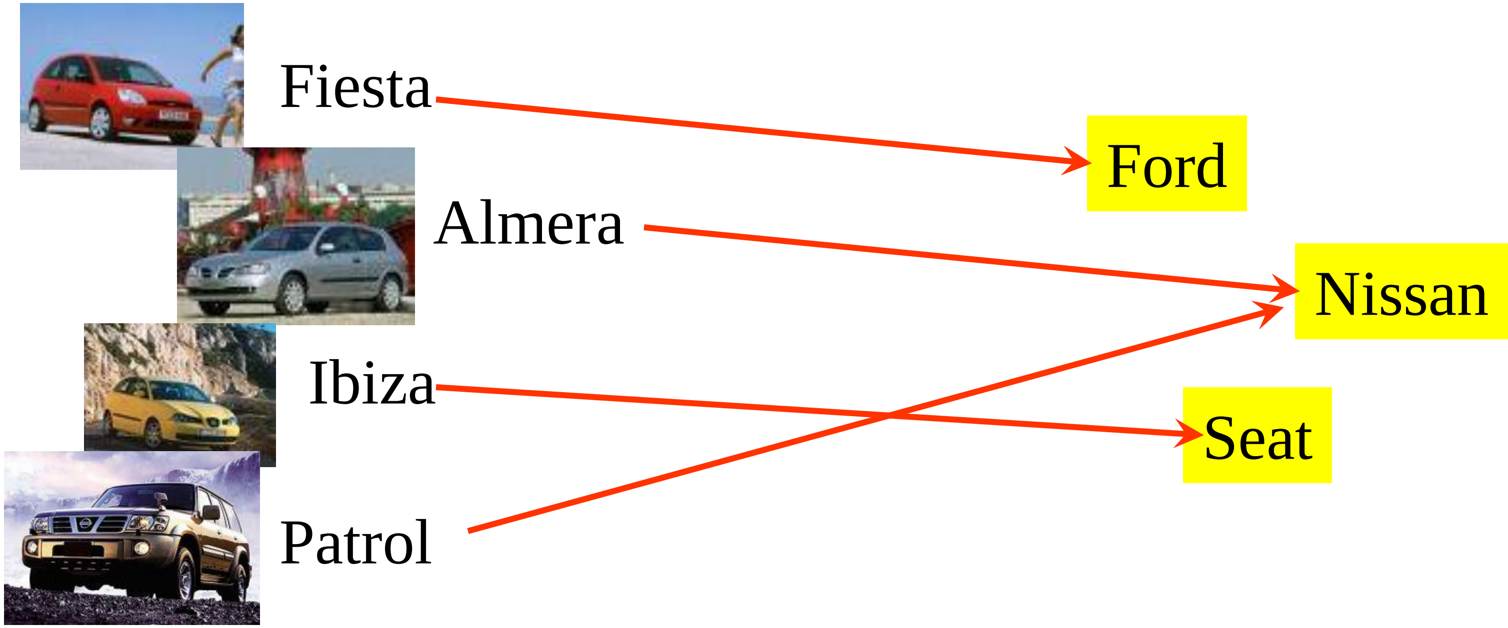
$$(y,x) \in r^{-1} \text{ wttw } (x,y) \in r.$$

Relacja odwrotna

A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

$r \subset A \times B$, $r = \{(a,b)$: a jest modelem marki b$\}$



Relacja odwrotna

A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

$r^{-1} \subset B \times A$, $r^{-1} = \{(b,a)$: b jest marką modelu a$\}$

Fiesta

Ford

Almera

Nissan

Ibiza

Seat

Patrol

Relacja odwrotna do relacji r

Złożenie relacji

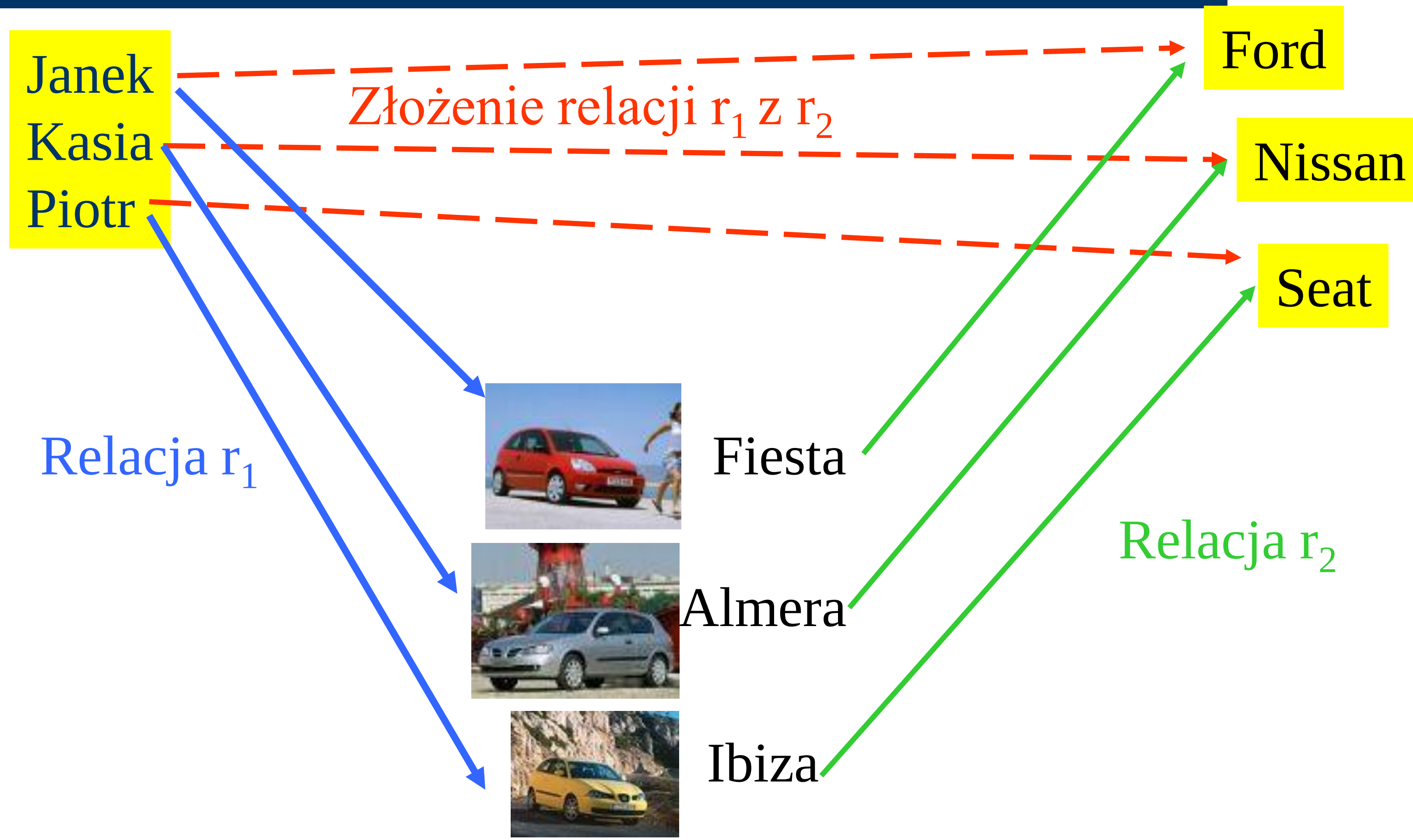
Niech $r_1 \subseteq X \times Y$ oraz $r_2 \subseteq Y \times Z$.

Złożeniem

relacji r_1 z r_2 nazywamy relację $r_1 \circ r_2$ będącą podzbiorem zbioru $X \times Z$ określoną dla dowolnych $x \in X$ i $z \in Z$ następująco:

$(x,z) \in r_1 \circ r_2$ wttw istnieje takie $y \in Y$, że $(x,y) \in r_1$ i $(y,z) \in r_2$.

Złożenie relacji



Lemat

Niech r będzie relacją binarną w zbiorze X. Wtedy

1. r jest relacją symetryczną wttw $r \subseteq r^{-1}$,
2. r jest relacją przechodnią wttw $r \circ r \subseteq r$.

Dowód: r jest relacją symetryczną wttw $r \subseteq r^{-1}$

Załóżmy, że r jest relacją symetryczną. Wówczas, jeśli $(x,y) \in r$, to na mocy symetrii również $(y,x) \in r$, a stąd $(x,y) \in r^{-1}$. Zatem $r \subseteq r^{-1}$.

Załóżmy, że $r \subseteq r^{-1}$. Wówczas, jeśli $(x,y) \in r$, to $(x,y) \in r^{-1}$ i z definicji operacji odwracania $(y,x) \in r$. Z dowolności wyboru x i y wynika, że r jest relacją symetryczną.

Dowód: r jest relacją przechodnią wttw $r \circ r \subseteq r$.

Załóżmy, że r jest relacją przechodnią. Wówczas, jeśli $(x,y) \in r \circ r$, to na mocy definicji operacji składania, istnieje z takie, że $(x,z) \in r$ i $(z,y) \in r$. Zatem, z przechodniości relacji r, $(x,y) \in r$. Ostatecznie $r \circ r \subseteq r$.

Załóżmy, że $r \circ r \subseteq r$. Wówczas, jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,z) \in r$ dla pewnych elementów x, y, z zbioru X, to $(x,z) \in r \circ r$ i w konsekwencji $(x,z) \in r$, co dowodzi przechodniości relacji r.

Relacje wieloargumentowe

Relacje wieloargumentowe

Każdy podzbiór zbioru

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

nazywamy

n-argumentową relacją.

Zbiór X_i nazywa się i-tą dziedziną relacji n-argumentowej.

Relacje wieloargumentowe

Niech $r \subseteq R \times R \times R$, relacja trójargumentowa zdefiniowana następująco:

$$r = \{(x,y,z) : x+y=z\}$$

Zauważmy, że:

$$(1,2,3) \in r$$
$$(3,4,7) \in r$$
$$(3,4,5) \notin r$$

Relacje równoważności

Intuicje

Lexus SC

Ford Fiesta

Seat Ibiza

Ford Expedition

Nissan Almera

Nissan Patrol

Lexus LS

Jeep Cherokee

Intuicje: podział według marki

Nissan Almera

Nissan Patrol

Lexus SC

Lexus LS

Ford Fiesta

Ford Expedition

Jeep Cherokee

Seat Ibiza

Intuicje: podział według klasy


Nissan Almera


Ford Fiesta


Seat Ibiza


Lexus LS

osobowe


Lexus SC

sportowe


Ford Expedition


Nissan Patrol


Jeep Cherokee

terenowe

Definicja

Relację binarną r określoną w zbiorze X nazywamy

relacją równoważności

wttw relacja r jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, tzn. dla dowolnych $x,y,z \in X$,

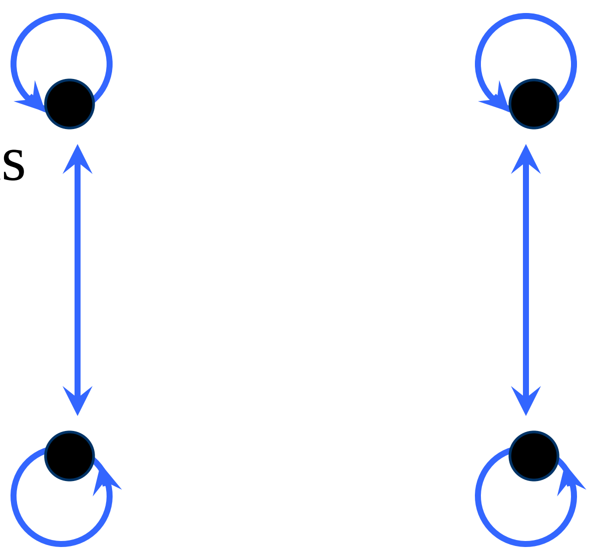
1. $(x,x) \in r$,
2. jeśli $(x,y) \in r$, to $(y,x) \in r$,
3. jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,z) \in r$, to $(x,z) \in r$.

Intuicje: podział według marki

r = {(a,b) : a jest samochodem tej samej marki, co b}

Lexus SC

Lexus LS



Ford Fiesta

Ford Expedition

To jest relacja równoważności

Klasy abstrakcji (warstwy)

Jeśli r jest relacją równoważności w zbiorze X, to przyjmujemy oznaczenie

$$[x]_r = \{y \in X : x\ r\ y\}.$$

O zbiorze $[x]_r$ mówimy:

klasa abstrakcji (warstwa)

elementu x, ze względu na relację r.

Klasy abstrakcji (warstwy)

O elemencie x mówimy, że jest **reprezentantem** klasy $[x]_r$.

Intuicje: podział według marki

WARSTWY

Lexus SC

Lexus LS

Ford Fiesta

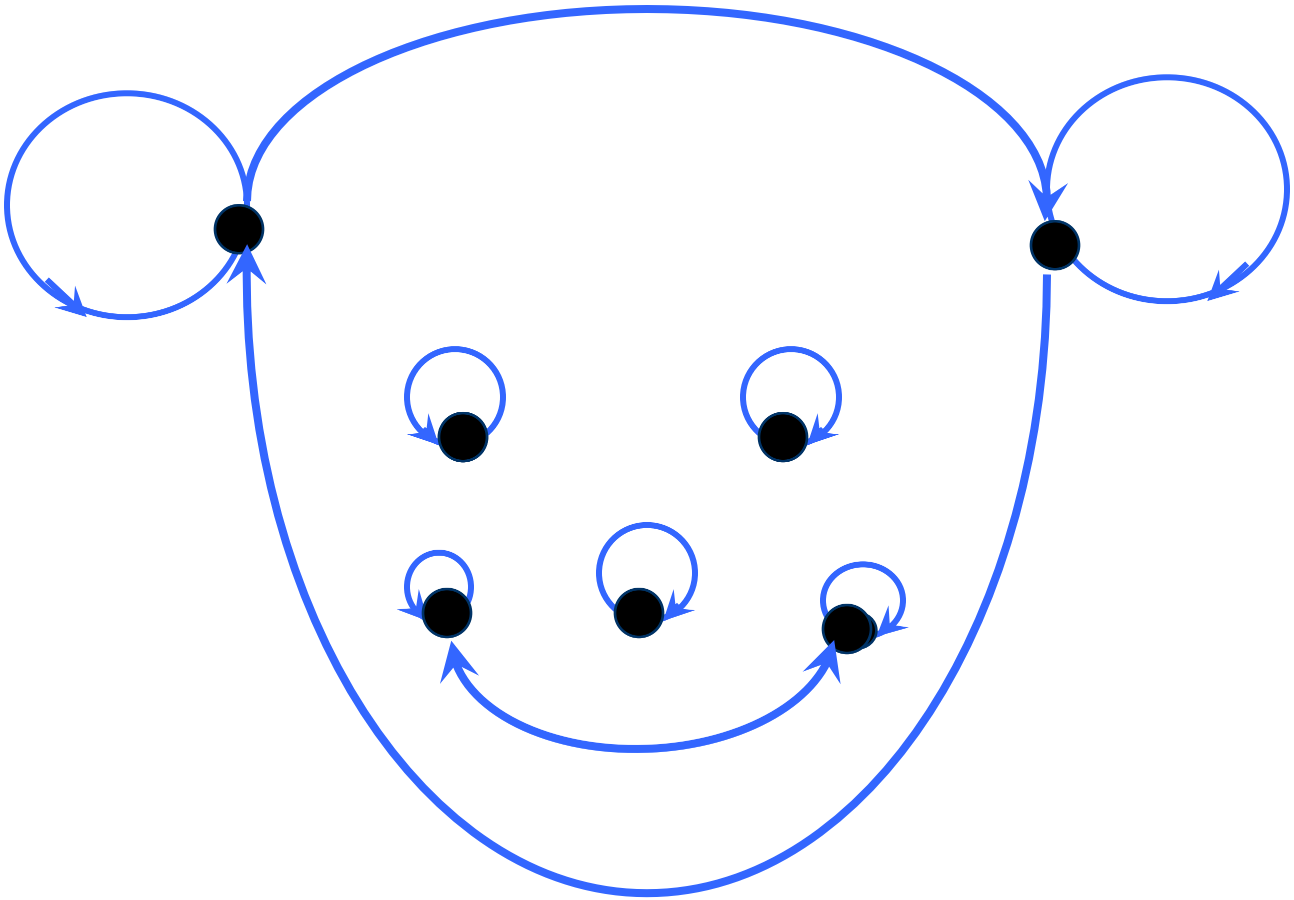
Ford Expedition

Reprezentant

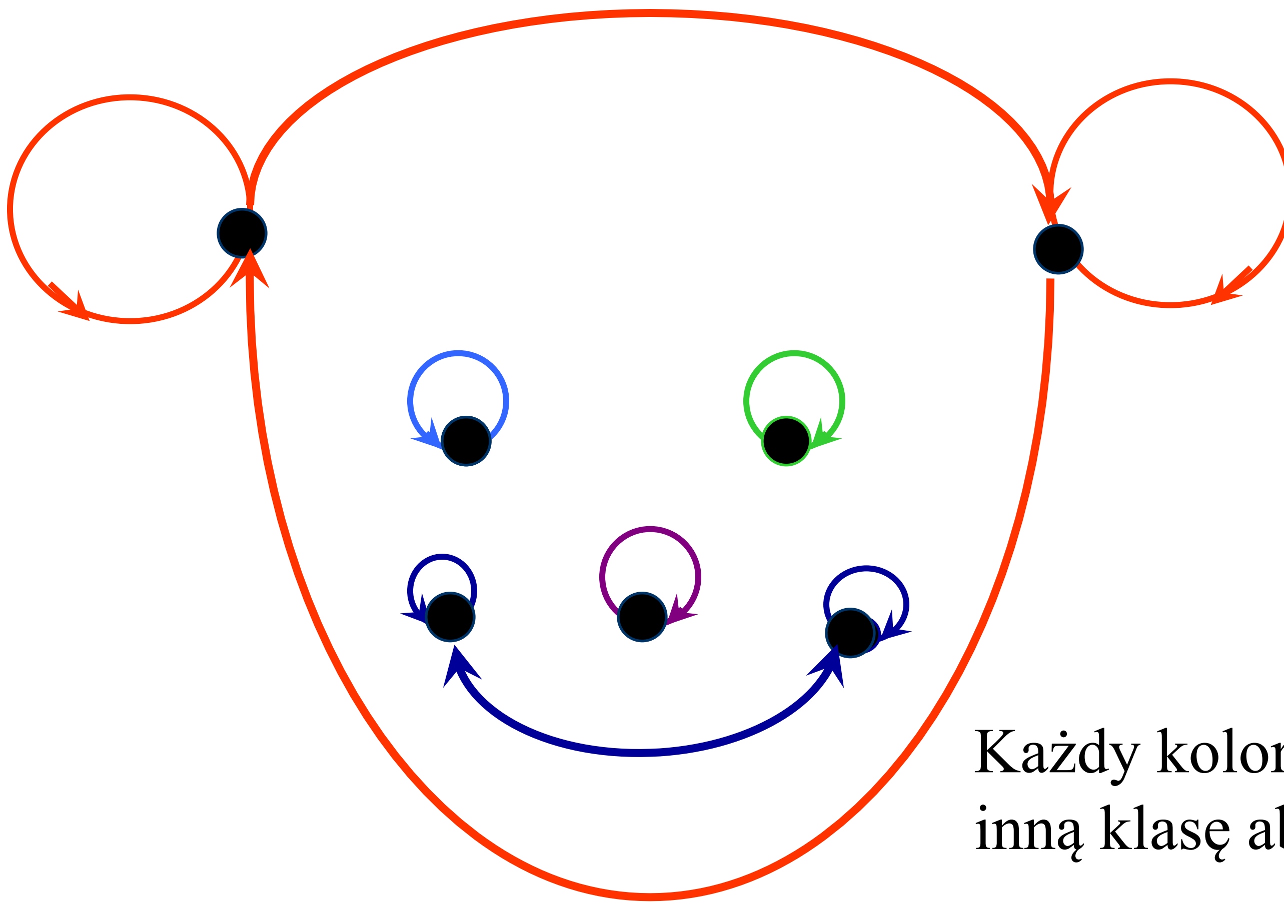
[**SC**] = {a : a jest samochodem marki Lexus}

[**Fiesta**] = {a : a jest samochodem marki Ford}

To też jest relacja równoważności



To też jest relacja równoważności



Każdy kolor określa
inną klasę abstrakcji

Przykład

Niech X=zbiór liczb całkowitych,

$$r=\{(x,y)\in X^2 : |x|=|y|\}$$

To jest relacja równoważności, bo jest ona:

zwrotna: dla każdego x, $|x|=|x|$

symetryczna: dla każdego x,y,

jeśli $|x|=|y|$, to $|y|=|x|$

przechodnia: dla każdego x,y,z,

jeśli $|x|=|y|$ i $|y|=|z|$, to $|x|=|z|$

Przykład

Niech X=zbiór liczb całkowitych,

$$r=\{(x,y)\in X^2 : |x|=|y|\}$$

Wyznaczymy klasy abstrakcji:

$[1]=\{x: x\ r\ 1\}=\{x: |x|=|1|\}=\{-1,1\}$

$[2]=\{x: x\ r\ 2\}=\{x: |x|=|2|\}=\{-2,2\}$

....

$[k]=\{x: x\ r\ k\}=\{x: |x|=|k|\}=\{-k,k\}$

....

Czy poniższa relacja jest relacją równoważności?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze liczb całkowitych taką, że

$$m \ r \ n \text{ wttw } m \equiv n \ (\mathrm{mod}\ 5).$$

Czy poniższa relacja jest relacją równoważności?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze programów taką, że program P1 jest w relacji r z programem P2 wttw wartość zmiennej x po wykonaniu programu P1 jest taka sama jak wartość zmiennej x po wykonaniu programu P2 dla tych samych danych początkowych.

Czy poniższa relacja jest relacją równoważności?

Niech r będzie relacją określoną w zbiorze automatów taką, że automat A1 jest w relacji r z automatem A2 wttw zbiór stanów osiągalnych automatu A1 jest taki sam jak zbiór stanów osiągalnych automatu A2 dla tych samych stanów początkowych.

Lemat

Niech r będzie relacją równoważności w X oraz $[x]_r$, $[y]_r$ klasami abstrakcji elementów x i y. Wówczas:

1. $x \in [x]_r$,
2. $[x]_r = [y]_r$ wttw $x \, r \, y$,
3. jeżeli $[x]_r \neq [y]_r$, to $[x]_r \cap [y]_r = \emptyset$.

Podziały zbioru

Definicja

Podziałem

zbioru X nazywamy indeksowaną rodzinę $(X_i)_{i\in I}$ niepustych podzbiorów zbioru X taką, że:

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } X = \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Zasada abstrakcji

Twierdzenie (zasada abstrakcji)

- Każda relacja równoważności r określona w niepustym zbiorze X, wyznacza podział tego zbioru na niepuste i rozłączne podzbiory, a mianowicie na klasy abstrakcji relacji r.
- Każdy podział zbioru X wyznacza relację równoważności, której klasami abstrakcji są dokładnie zbiory tego podziału.

Przykład

Relacja $r=\{(x,y)\in Z^2 : |x|=|y|\}$ określona w zbiorze liczb całkowitych dzieli ten zbiór na podzbiory postaci $\{-k,k\}$ dla $k\in Z$.

$Z=\{0\}\cup\{-1,1\}\cup\{-2,2\}\cup\{-3,3\}\cup \ldots$

Przykład

Relacja $r=\{(x,y)\in Z^2 : m\equiv n \pmod 5\}$ określona w zbiorze liczb całkowitych dzieli ten zbiór na 5 podzbiorów.

$$Z=\{5k:k\in Z\}\cup\{5k+1:k\in Z\}\cup\{5k+2:k\in Z\}\cup\{5k+3:k\in Z\}\cup\{5k+4:k\in Z\}$$

Równoważność programów

Przykłady definicji równoważności programów

1. Programy P1 i P2 są równoważne wttw dla **dowolnej zmiennej** x, wartość zmiennej x po wykonaniu programu P1 jest taka sama jak wartość zmiennej x po wykonaniu programu P2 dla tych samych danych początkowych.

Przykłady definicji równoważności programów

2. Programy P1 i P2 są równoważne ze względu na **zbiór zmiennych** X w strukturze A wttw

- dla dowolnych danych początkowych v, P1 ma obliczenie skończone wttw P2 ma obliczenie skończone oraz
- jeżeli dla dowolnie ustalonych danych początkowych oba programy mają obliczenia skończone i udane, to wyniki są identyczne na zbiorze zmiennych X.

Przykłady definicji równoważności programów

3. Programy P1 i P2 są równoważne w strukturze A ze względu na zbiór własności Z wttw dla dowolnego $\alpha \in Z$ i dla dowolnych danych początkowych wyniki programu P1 spełniają **warunek** α wtedy i tylko wtedy, gdy wyniki programu P2 spełniają warunek α.

Zadanie domowe

Dane są dwa programy P1 i P2. Czy są one równoważne w sensie powyższych definicji? Co obliczają te programy?

Zadanie domowe

P1(x):

```
begin
    a:=1; b:=x;
    while (b-a)≥ δ
        do
            y:=(a+b)/2;
            if (a² -x)(y²-x)≤0 then b:=y else a:=y fi
        od
end
```

(x jest liczbą dodatnią większą od 1, a δ ustaloną liczbą dodatnią)

Zadanie domowe

P2(x):

```
begin
    z:=0; y:=x;
    while |z-y|≥ δ
        do
            z:=y;
            y:=(z+x/z)/2
        od
end
```