Porządki

Materiały pomocnicze do wykładu

uczelnia: **PJWSTK**
przedmiot: **Matematyka Dyskretna 1**
wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Relacje porządkujące

Przykład: marynarka wojenna

kapitan marynarki

porucznik marynarki

admirał

chorąży

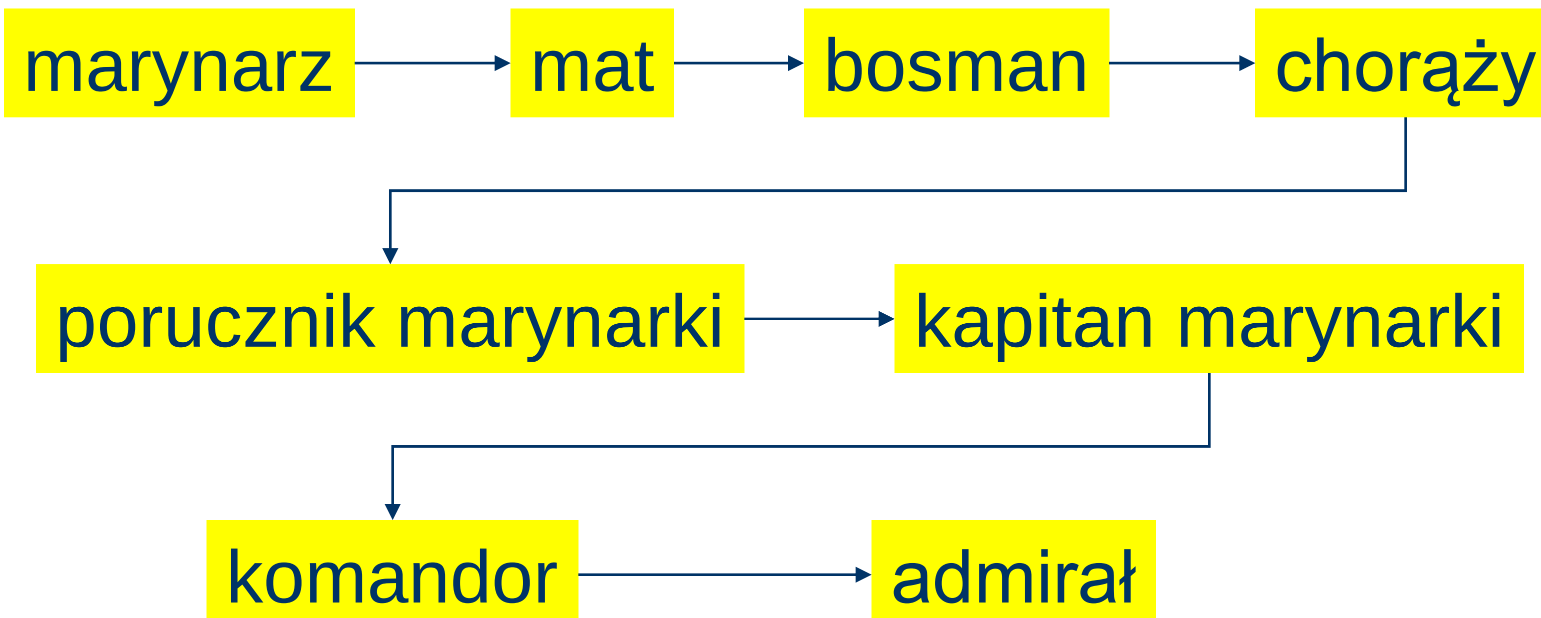
komandor

marynarz

mat

bosman

Przykład: marynarka wojenna



Przykład: marynarka wojenna

admirał, komandor, kapitan marynarki, porucznik marynarki, chorąży sztabowy, bosman, mat, marynarz

Przykład: wojska lądowe

pułkownik

generał

kapral

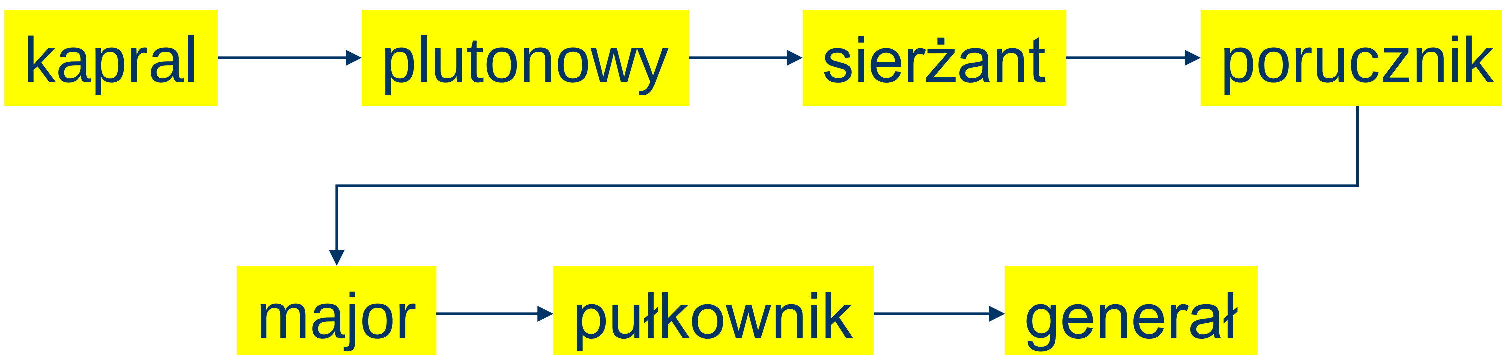
porucznik

plutonowy

major

sierżant

Przykład: wojska lądowe



Przykład: wojska lądowe

generał, pułkownik, major, porucznik, chorąży, sierżant, plutonowy, kapral

Przykład: PJWSTK - struktura

Prorektor ds. studenckich

Prodziekan Wydziału Informatyki

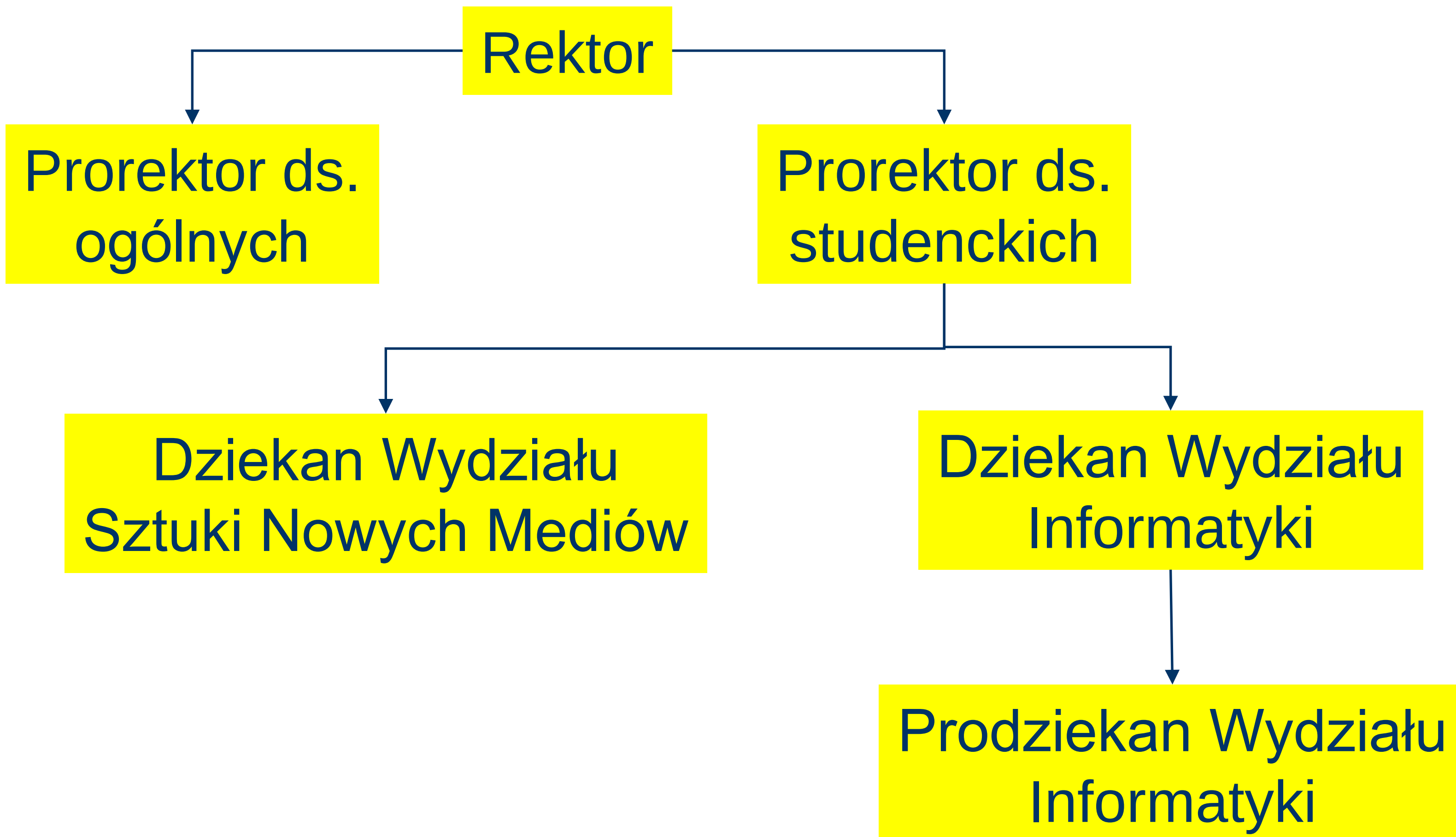
Dziekan Wydziału Informatyki

Prorektor ds. ogólnych

Rektor

Dziekan Wydziału Sztuki Nowych Mediów

Przykład: PJWSTK - struktura



Przykład

Zbiór: {11,12,13,10}

Relacja: $\leq$

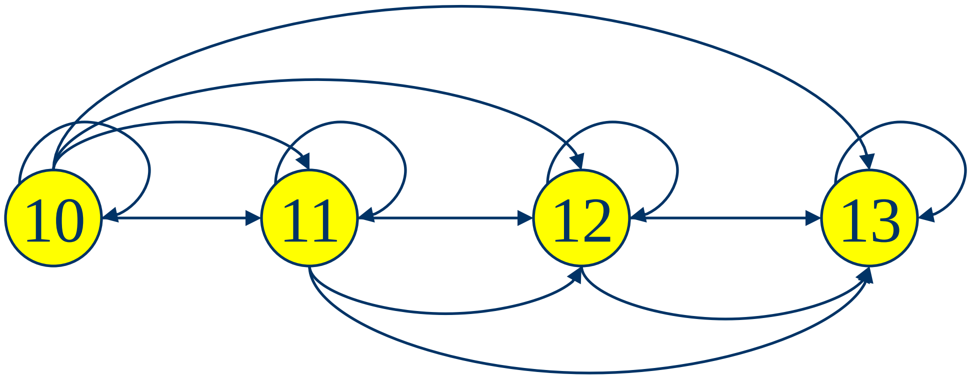
Graf:

Przykład

Zbiór: {10,11,12,13}

Relacja: $\leq$

Graf:



Przykład

Zbiór: {2,4,6,8}

Relacja: | (podzielności)

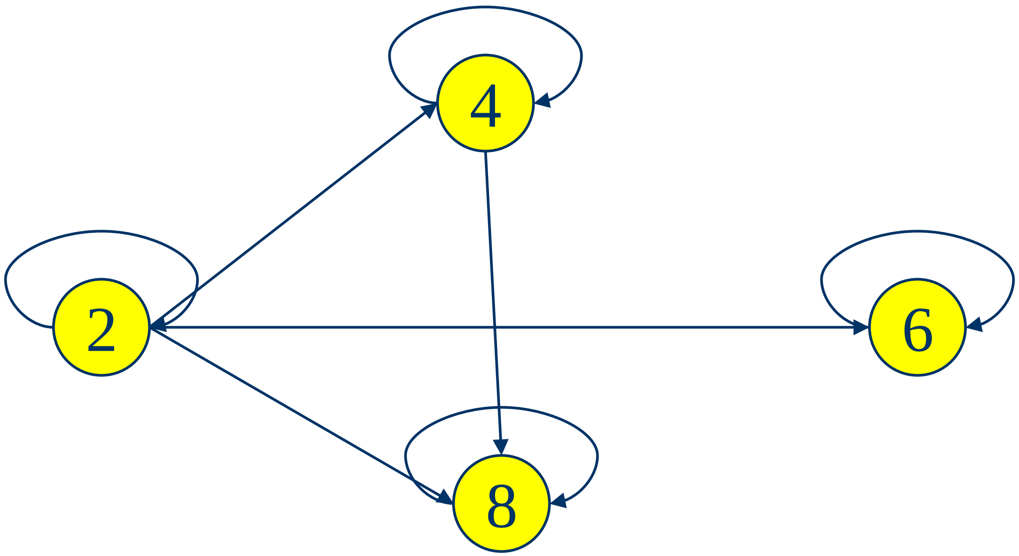
Graf:

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8}

Relacja: | (podzielności)

Graf:



Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: $|$ (podzielności)

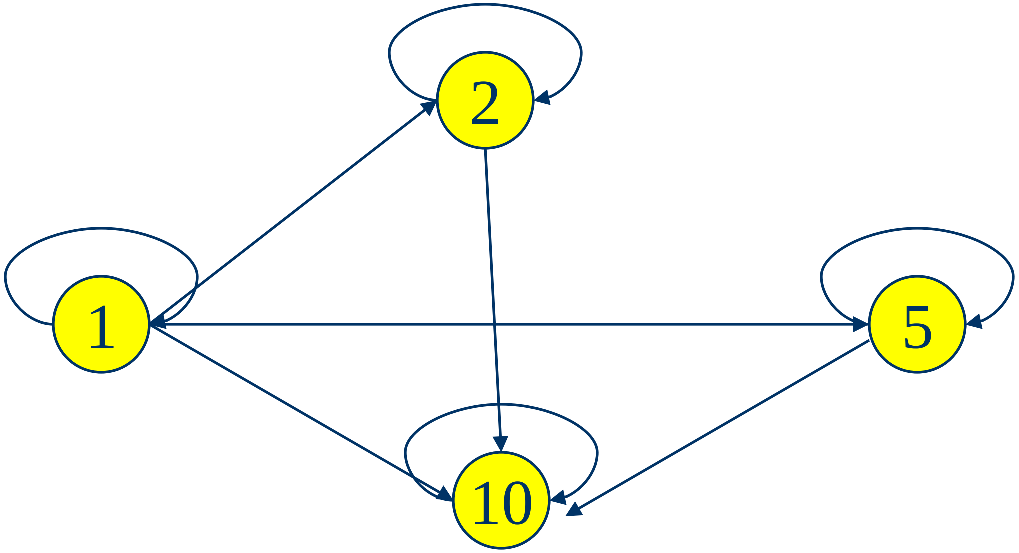
Graf:

Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Graf:



Przykład

Zbiór: P(X), gdzie X={1,2},

P(X)=????

Relacja: $\subseteq$

Graf:

Przykład

Zbiór: $P(X)$, gdzie $X=\{1,2\}$,

$P(X)=\{\emptyset, \{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

Relacja: $\subseteq$

Graf:

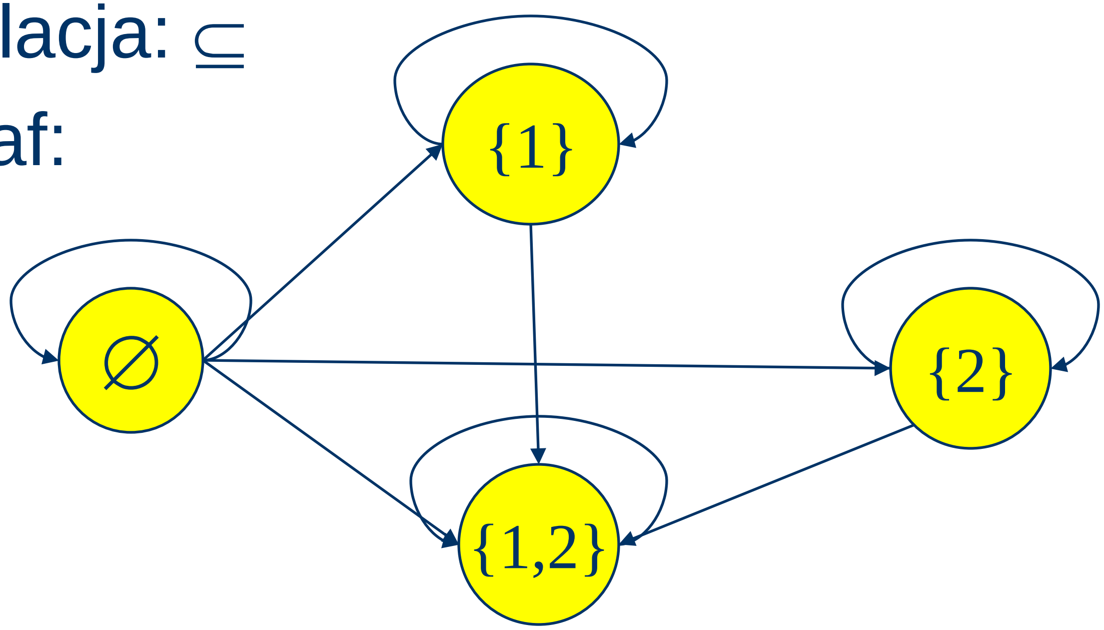
Przykład

Zbiór: P(X), gdzie X={1,2},

P(X)={∅, {1},{2},{1,2}}

Relacja: $\subseteq$

Graf:



Definicja

Relację binarną r w zbiorze X nazywamy relacją **porządku częściowego** lub krótko relacją porządku wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona **zwrotna**, **antysymetryczna** i **przechodnia**, tzn. dla wszystkich $x, y, z \in X$,

1. $(x,x) \in r$,
2. jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,x) \in r$, to $x = y$,
3. jeśli $(x,y) \in r$ i $(y,z) \in r$, to $(x,z) \in r$.

Relacja: zwrotna, antysymetryczna, przechodnia

- $R = \leq$
- $R = |$
- $R = \subseteq$

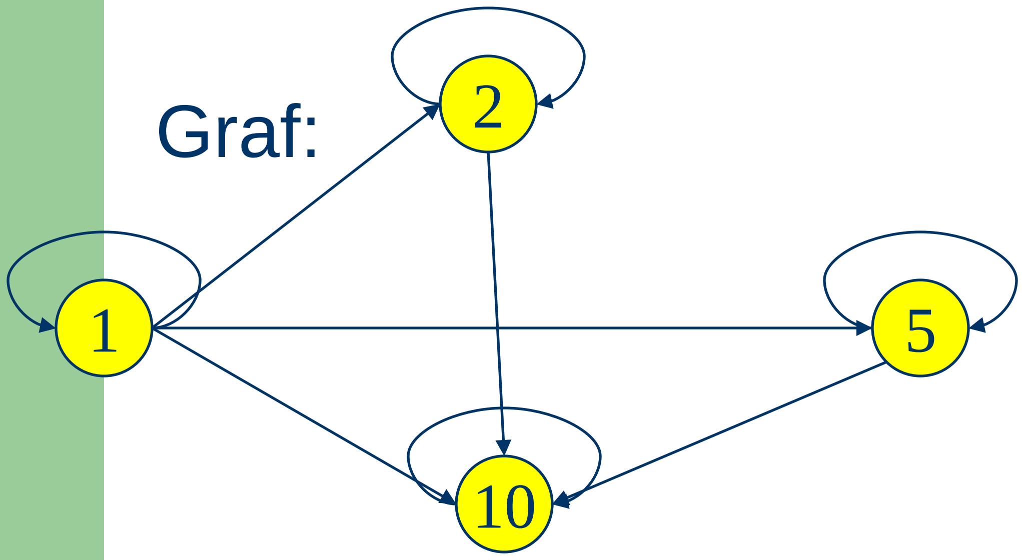
Diagramy Hassego

Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Graf:

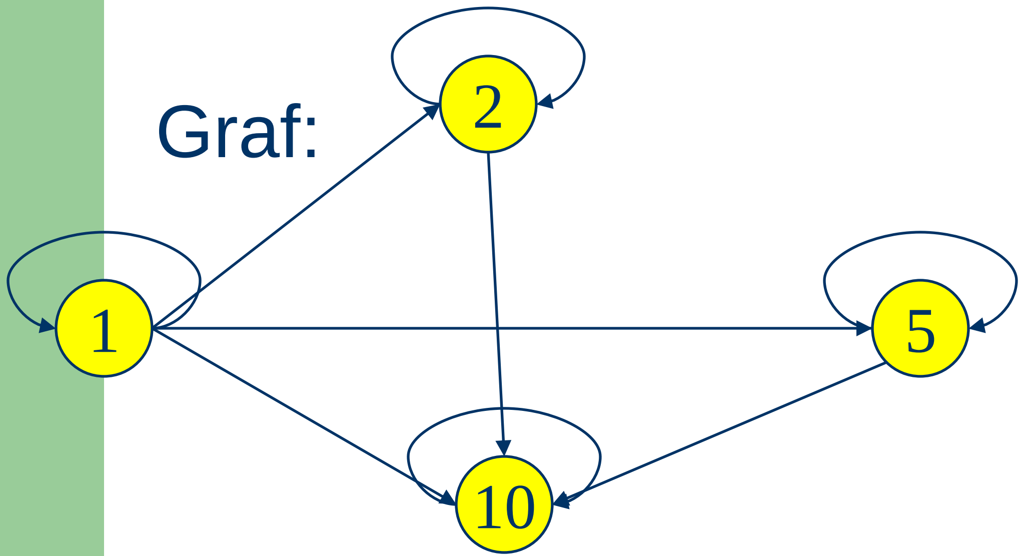


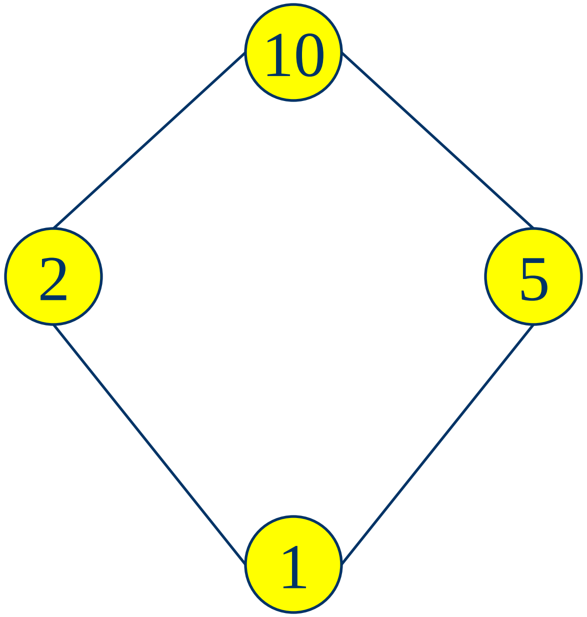
Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Graf:





Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Graf:

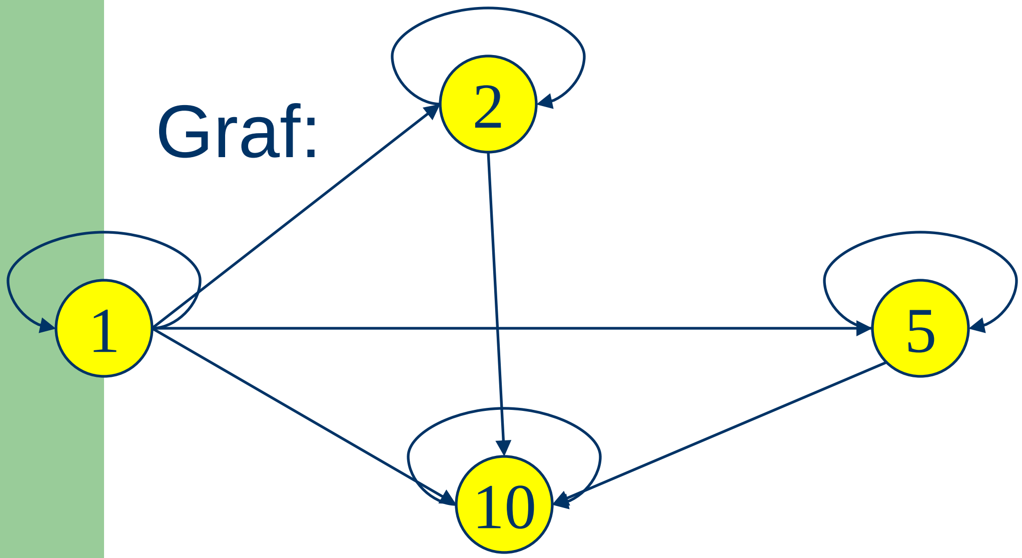
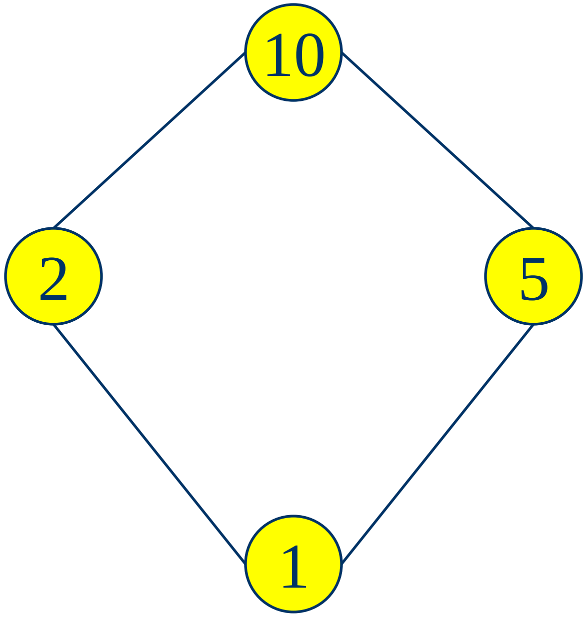


Diagram Hassego



Definicja

Diagramem Hassego relacji porządku r w zbiorze X nazywamy graf niezorientowany G=(X,E), którego zbiorem wierzchołków jest zbiór X , a krawędzie są określone następująco

$(x,y)\in E$ wttw $(x,y)\in r$ i nie istnieje $z\in X$, że $z\neq x$, $z\neq y$ i $(x,z)\in r$ i $(z,y)\in r$

Elementy wyróżnione

Definicja

Element x_0 nazywamy

maksymalnym

w zbiorze uporządkowanym (X,r)

wtedy i tylko wtedy, gdy

nie istnieje $y \in X$ taki, że

$$x_0 \neq y \text{ i } (x_0,y) \in r.$$

Definicja

Element x_0 nazywamy

minimalnym

w zbiorze uporządkowanym (X,r)

wtedy i tylko wtedy, gdy

nie istnieje $y \in X$ taki, że

$$x_0 \neq y \text{ i } (y,x_0) \in r.$$

Definicja

Element x_0 nazywamy

najmniejszym

w zbiorze uporządkowanym (X,r) wtedy i tylko wtedy, gdy

dla każdego $y \in X$, $(x_0,y) \in r$.

Definicja

Element x_0 nazywamy

największym

w zbiorze uporządkowanym (X,r)

wtedy i tylko wtedy, gdy

dla wszystkich $y \in X$,

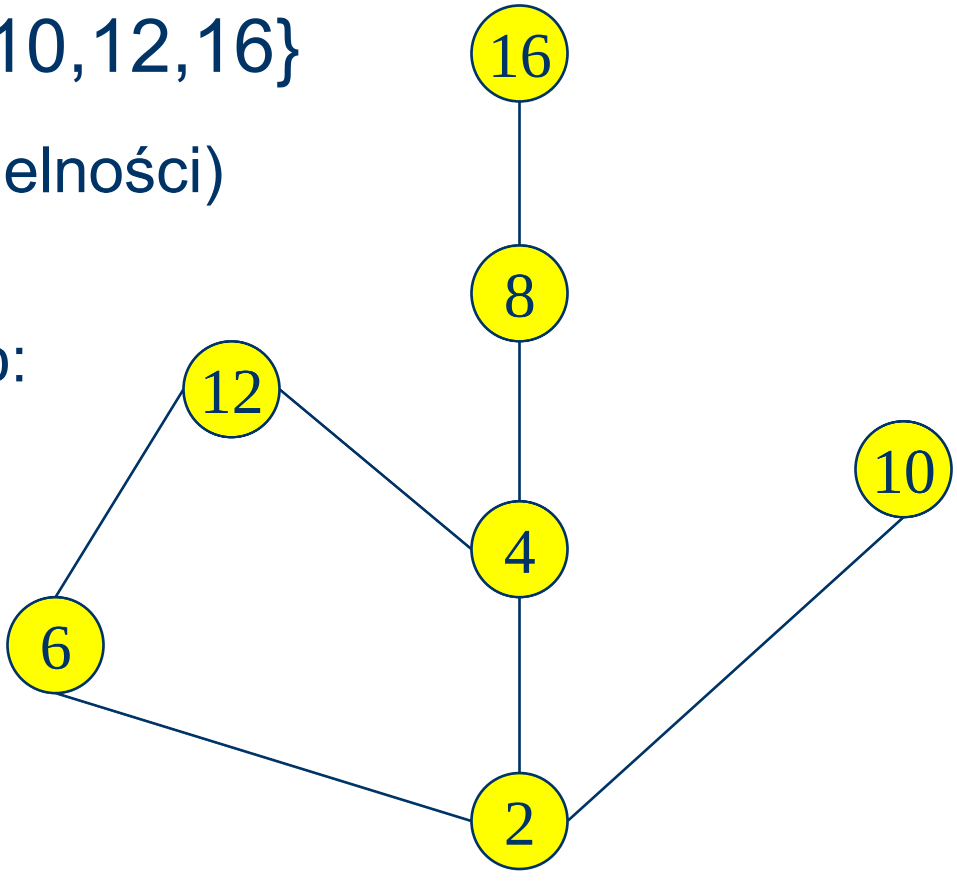
$(y,x_0) \in r$.

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

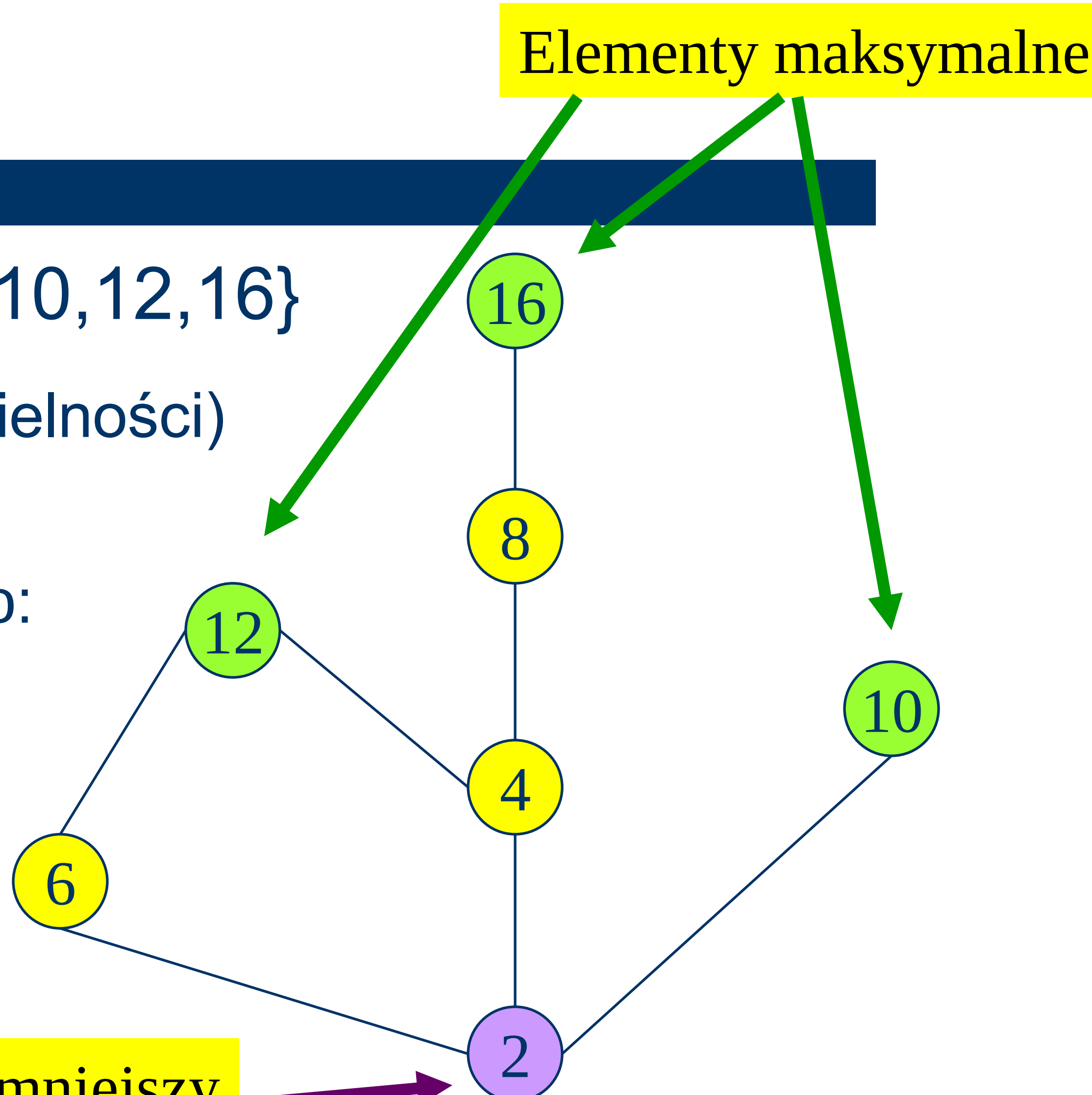


Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



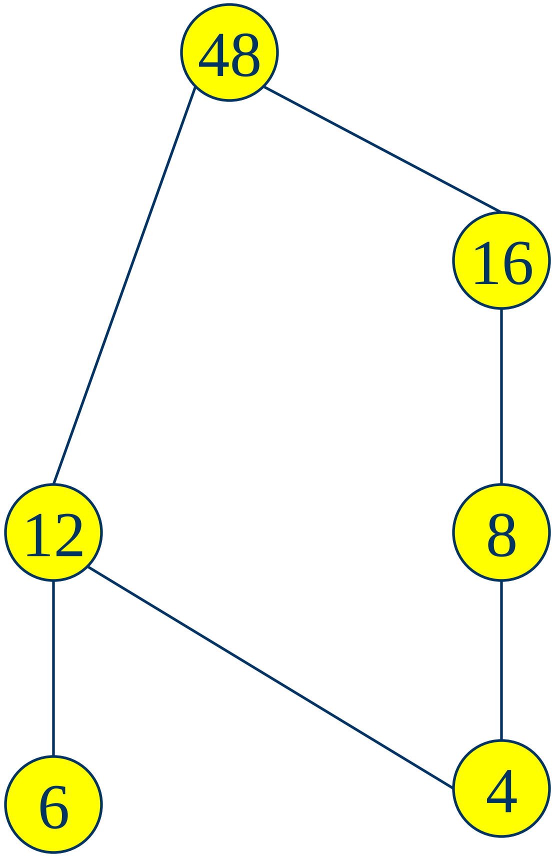
Element minimalny i najmniejszy

Przykład

Zbiór: {4,6,8,12,16,48}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

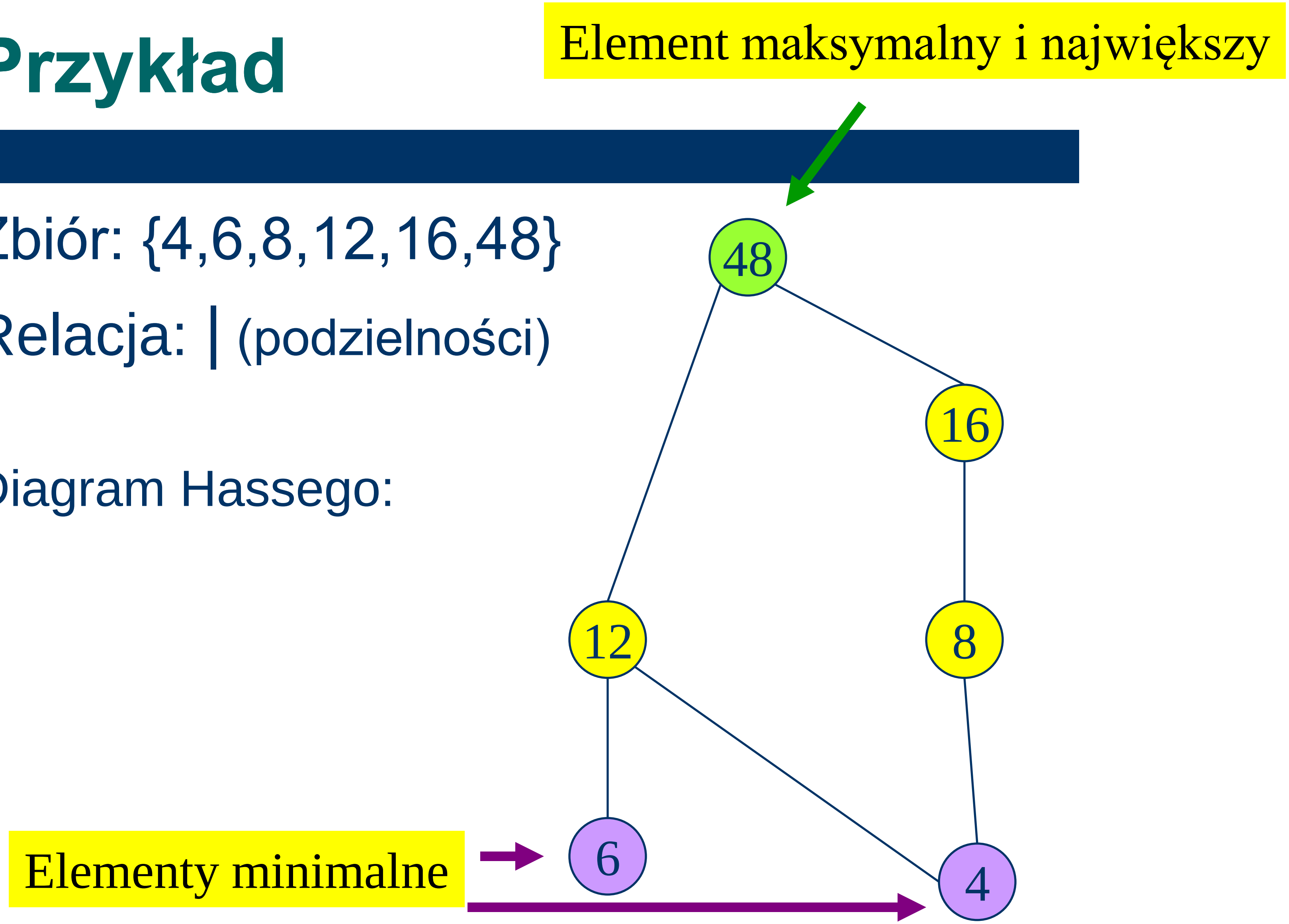


Przykład

Zbiór: {4,6,8,12,16,48}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

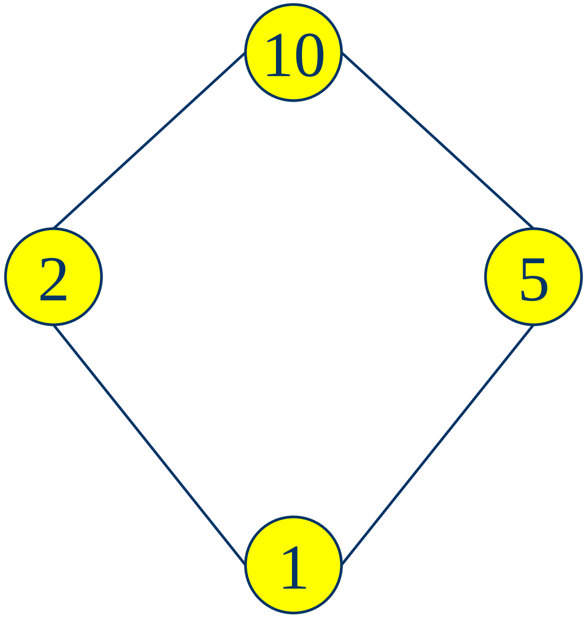


Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



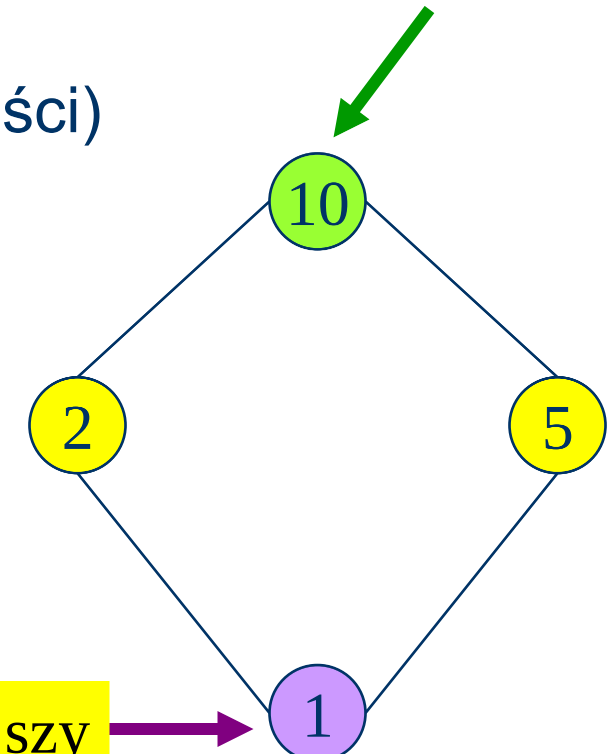
Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

Element maksymalny i największy



Element minimalny i najmniejszy

Przykład

Zbiór: {4,8,16}

Relacja: | (podzielności)

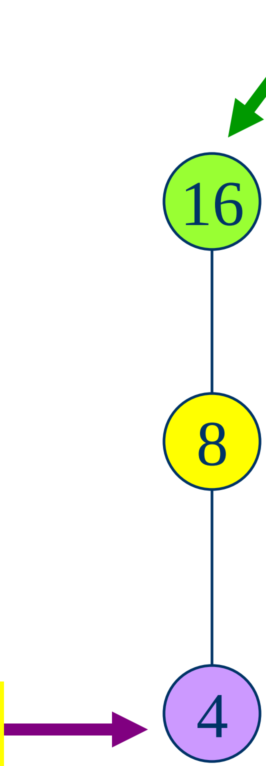
Diagram Hassego:

Przykład

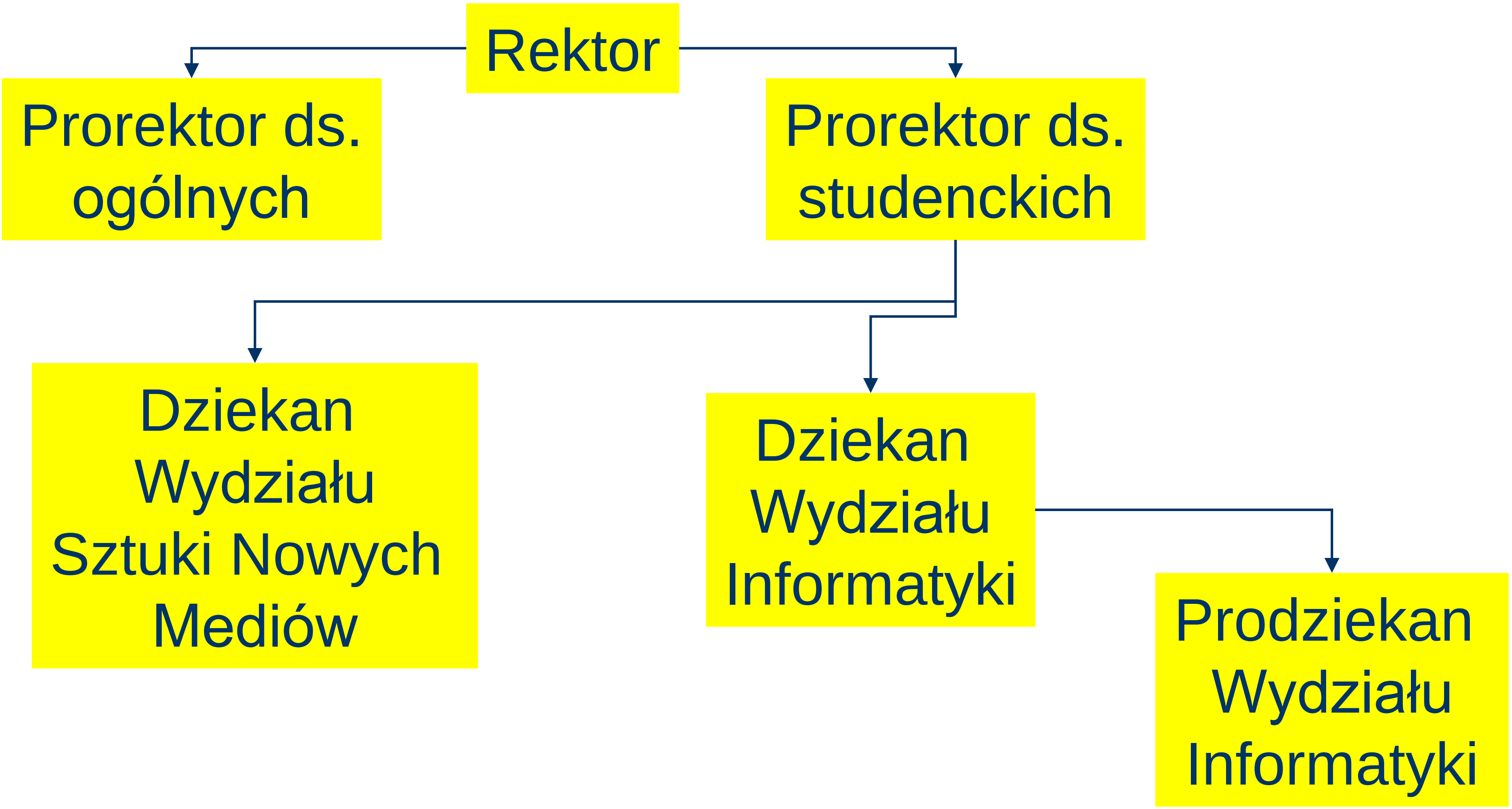
Zbiór: {4,8,16}

Relacja: | (podzielności)

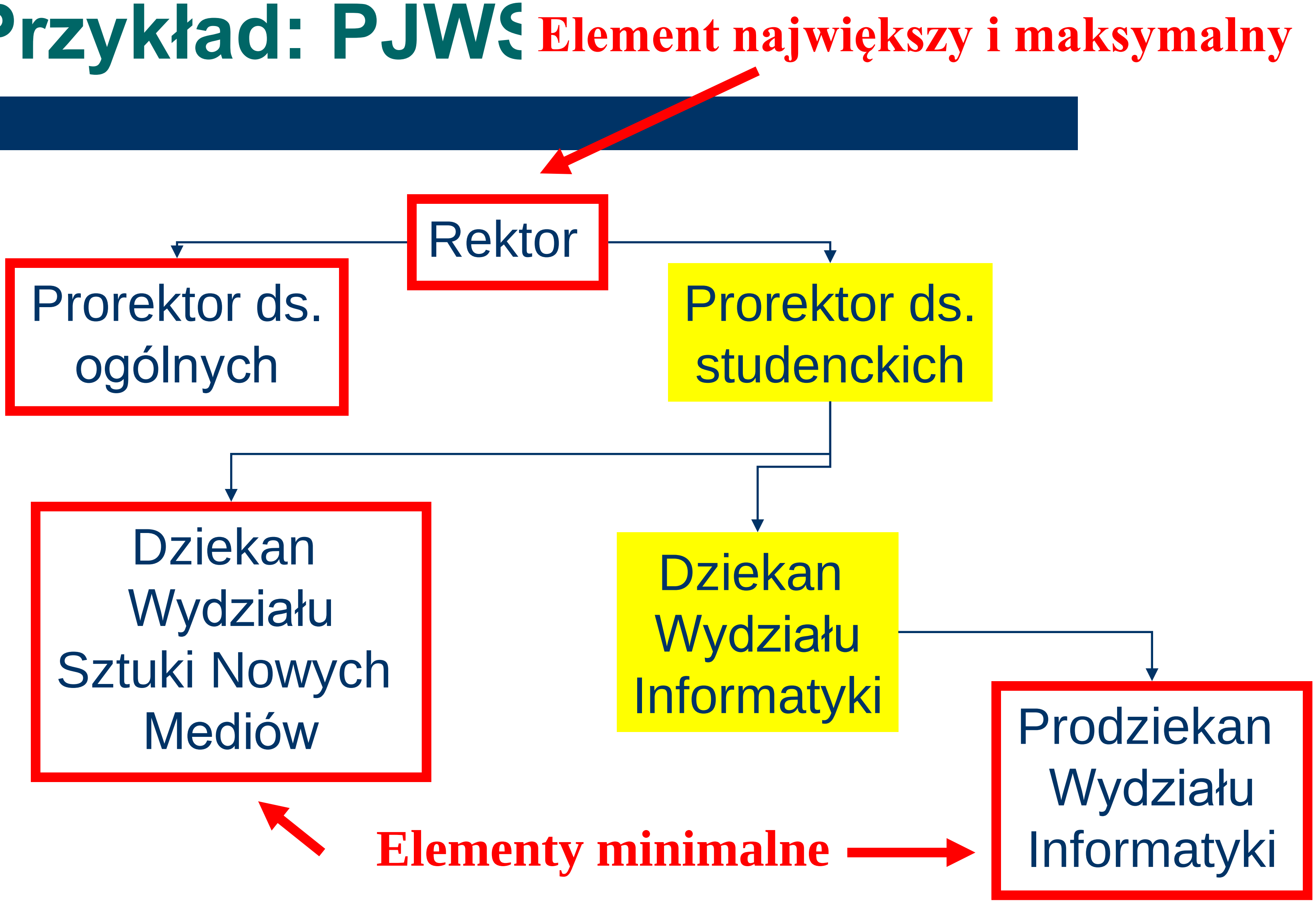
Diagram Hassego:



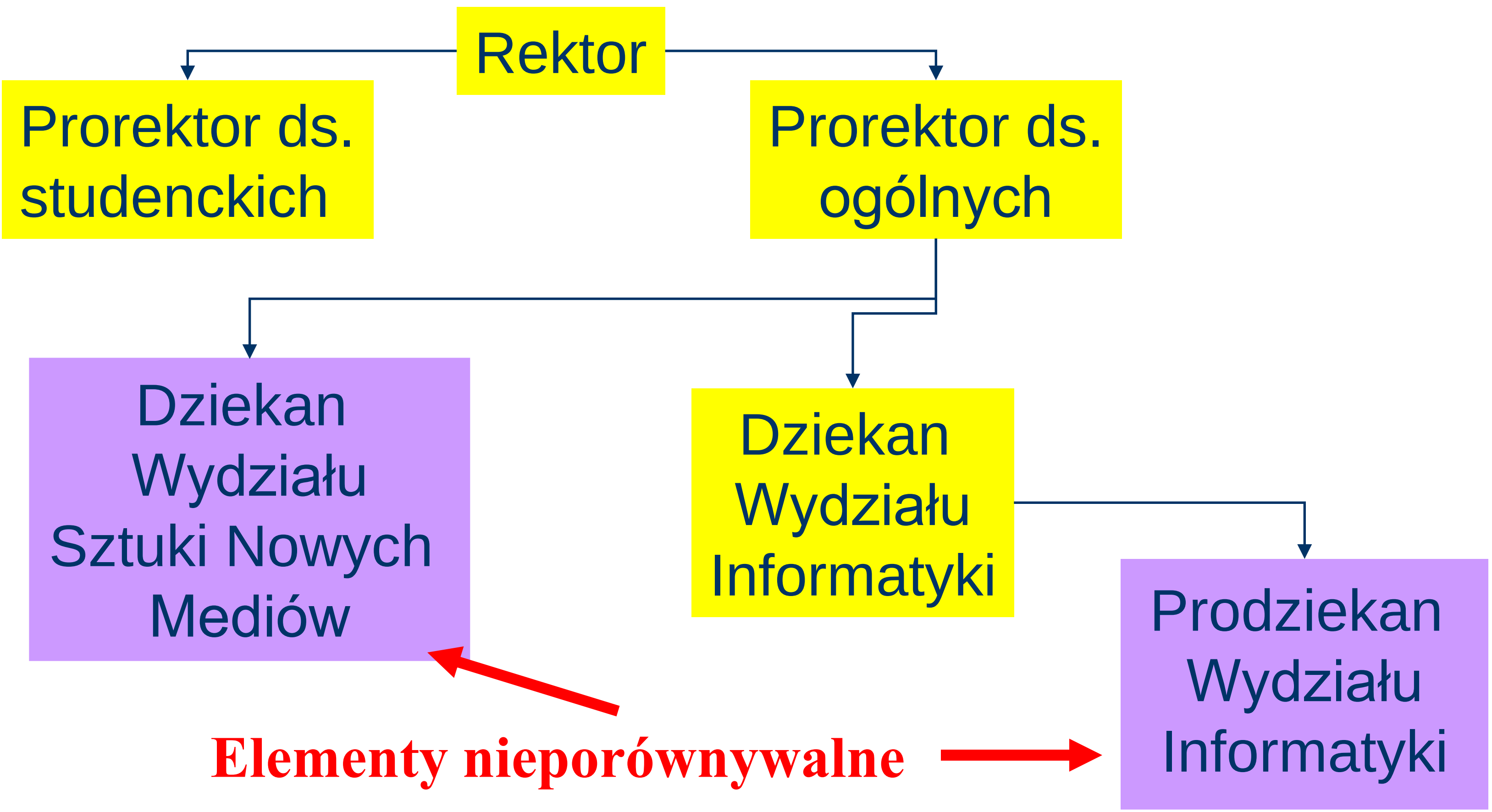
Przykład: PJWSTK - struktura



Przykład: PJWS



Przykład: PJWSTK - struktura



Ograniczenia i kresy zbiorów

Definicja

Niech r będzie relacją porządku w X oraz niech A będzie podzbiorem X.

Ograniczeniem górnym

zbioru A w X nazywamy element $x_0 \in X$, taki, że

$$(a, x_0) \in r \text{ dla wszystkich } a \in A.$$

Definicja

Ograniczeniem dolnym

zbioru A w X nazywamy element $x_1 \in X$ taki, że

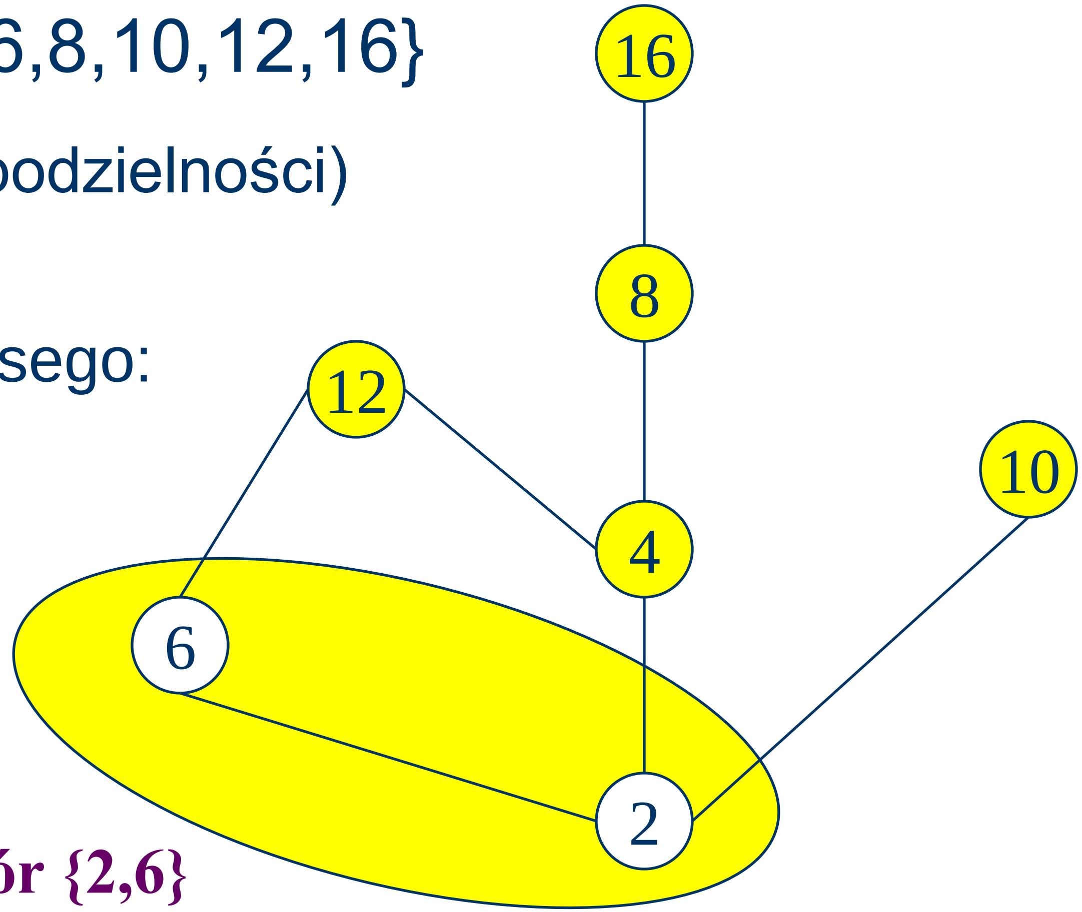
$(x_1,a) \in r$ dla wszystkich $a \in A$.

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



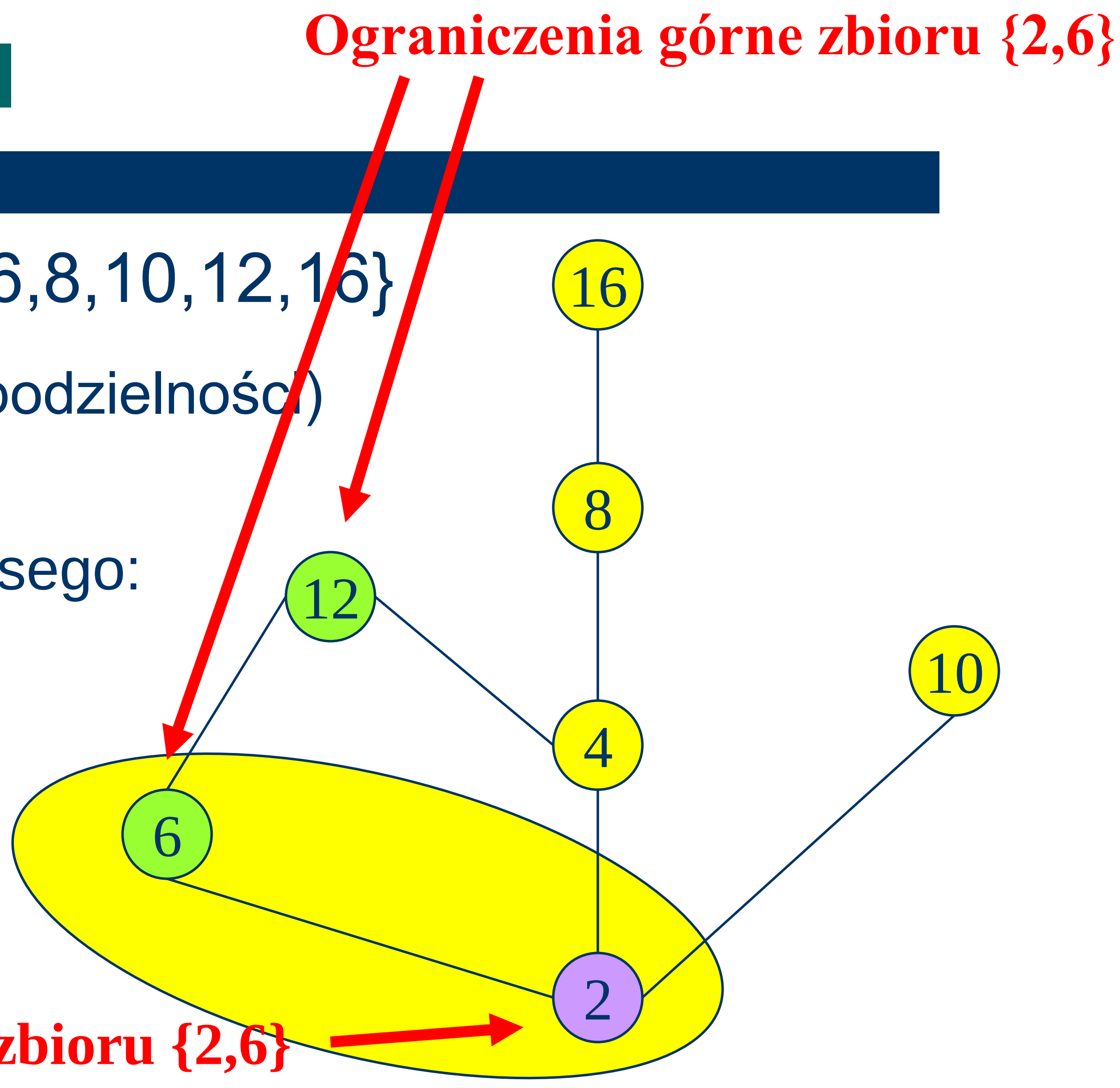
Rozważmy zbiór {2,6}

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

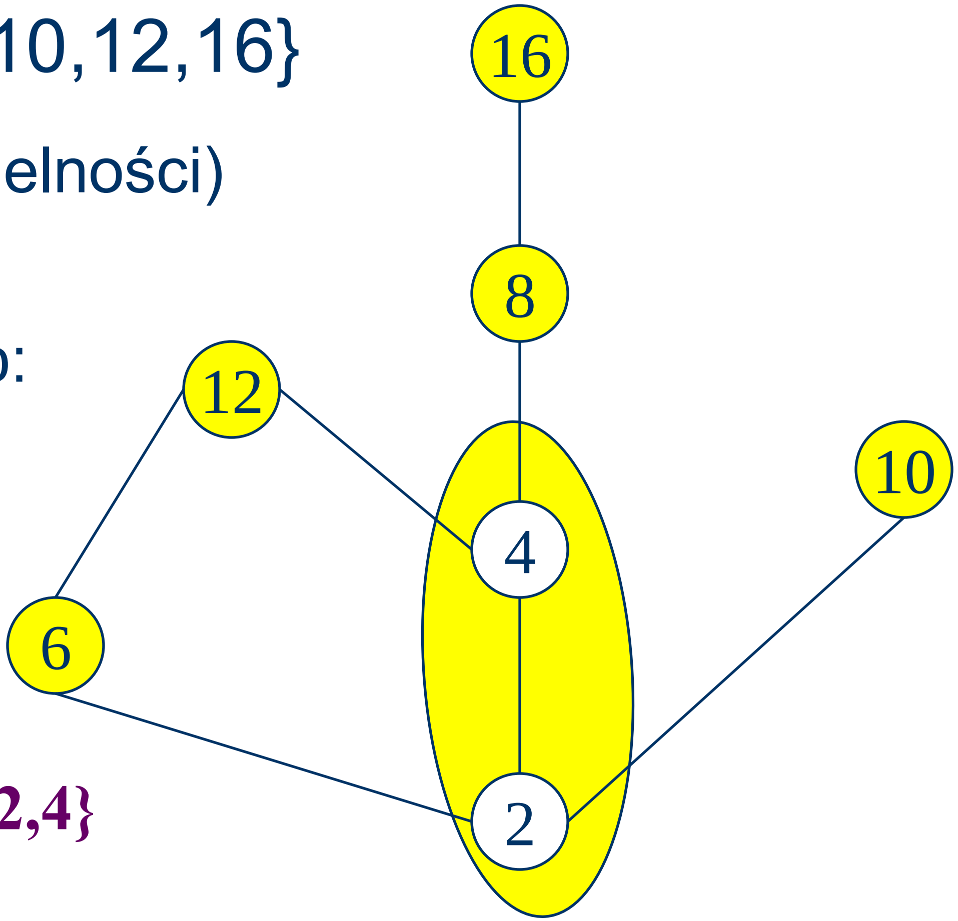


Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



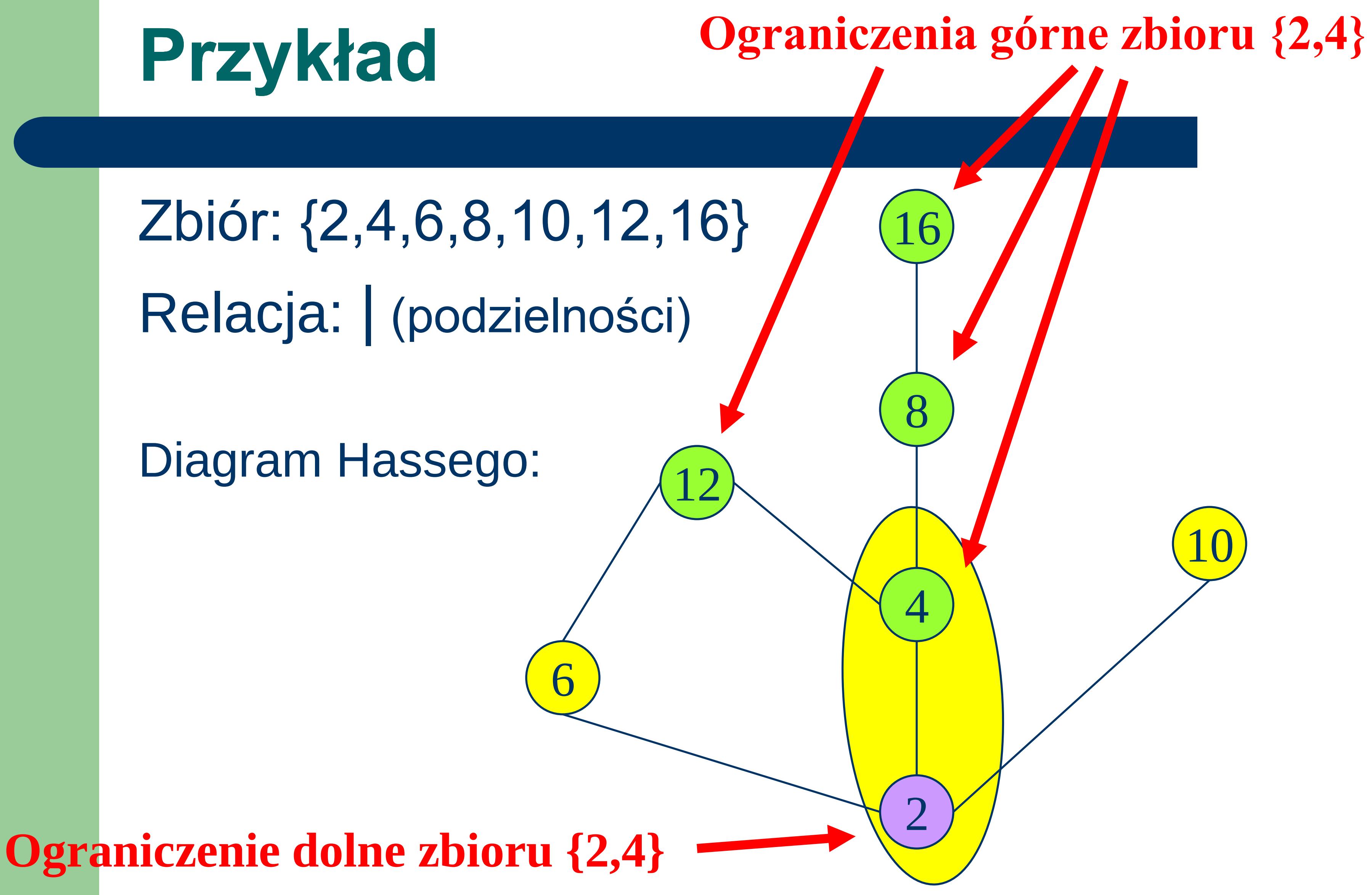
Rozważmy zbiór {2,4}

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



Uwaga

Podzbiór zbioru uporządkowanego może mieć wiele różnych ograniczeń górnych i wiele różnych ograniczeń dolnych.

Ograniczenia dolne i ograniczenia górne danego zbioru A mogą, ale nie muszą, należeć do zbioru A.

Definicja

Kresem górnym (supremum)
zbioru A, podzbioru zbioru uporządkowanego (X,r) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A, oznaczone przez **sup A**, tzn. x_0 = sup A wttw

1. $(a,x_0) \in r$ dla każdego $a \in A$,
2. jeśli b jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $(x_0,b) \in r$.

Definicja

Kresem dolnym (infimum)

podzbioru A zbioru uporządkowanego (X,r) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A oznaczone przez **inf A**,

tzn. x_1 = inf A wttw

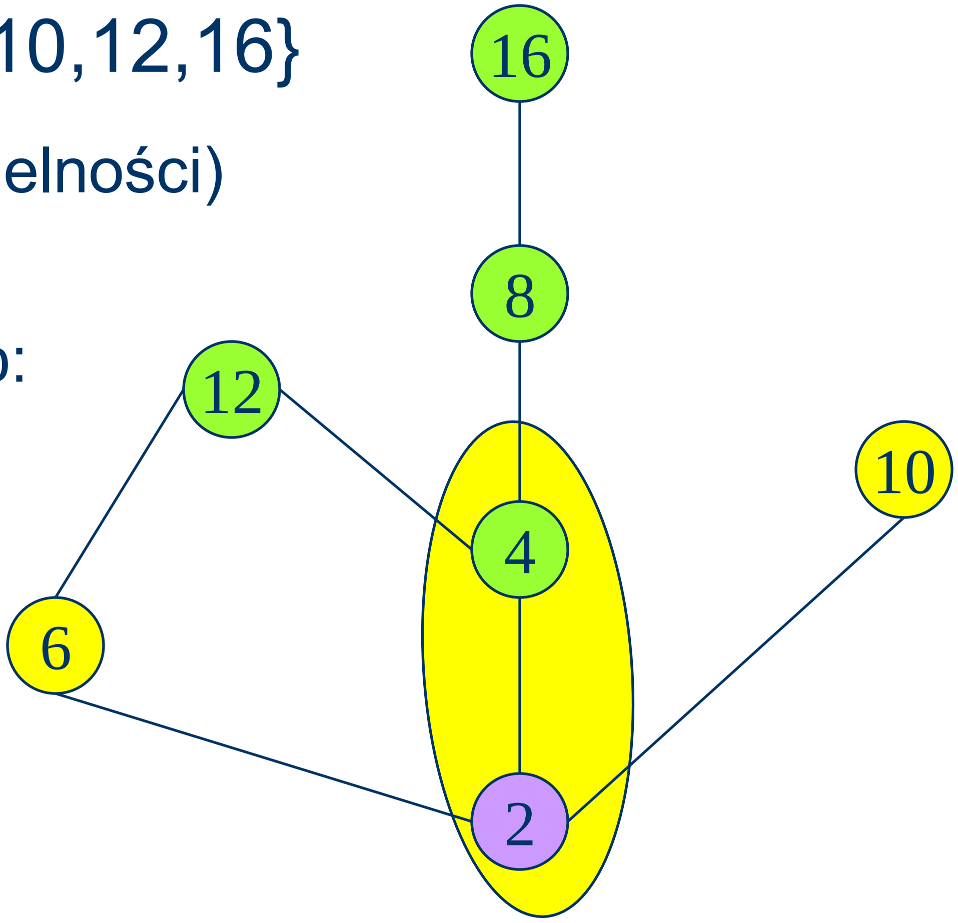
1. $(x_1,a)\in r$ dla każdego $a\in A$,
2. jeśli b jest ograniczeniem dolnym zbioru A, to $(b,x_1)\in r$.

Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

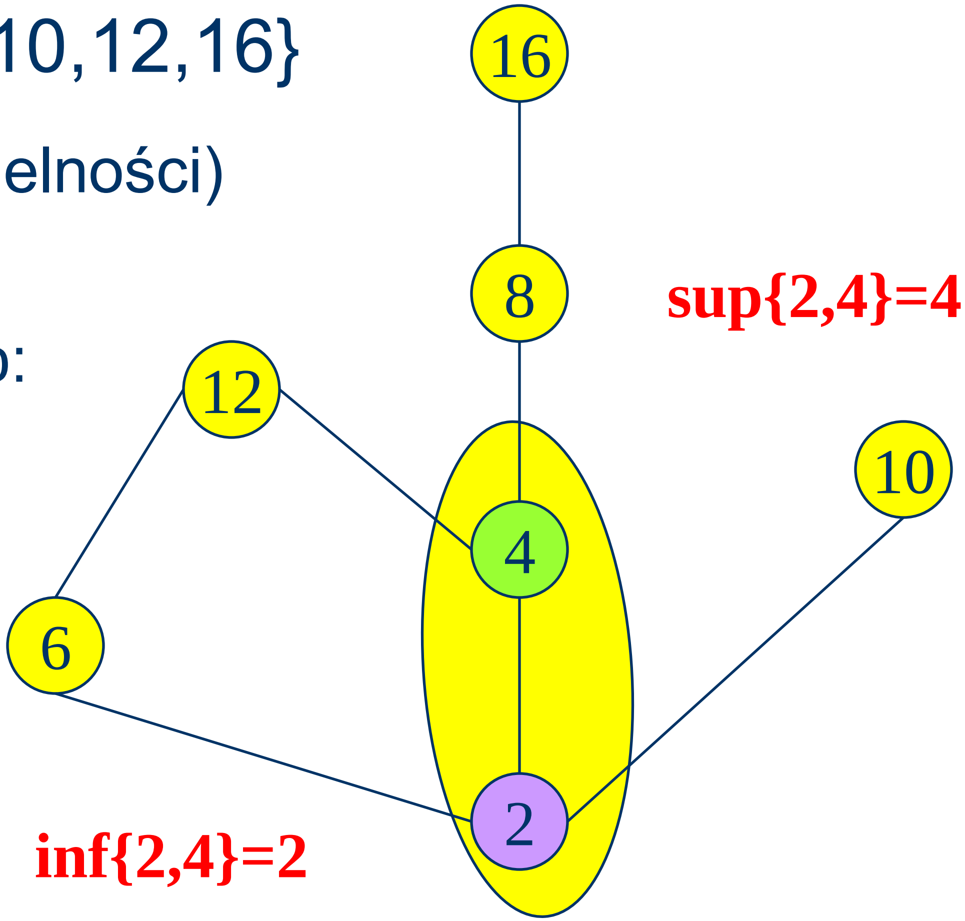


Przykład

Zbiór: {2,4,6,8,10,12,16}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

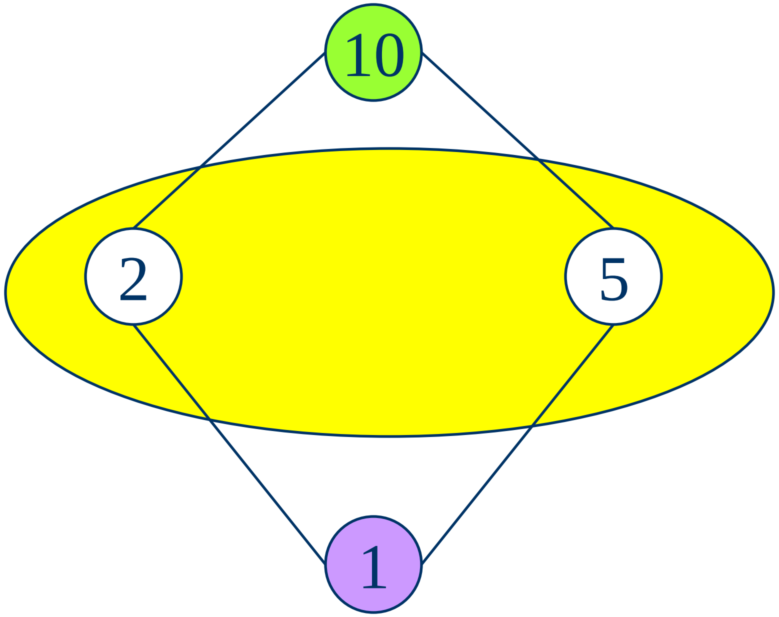


Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:

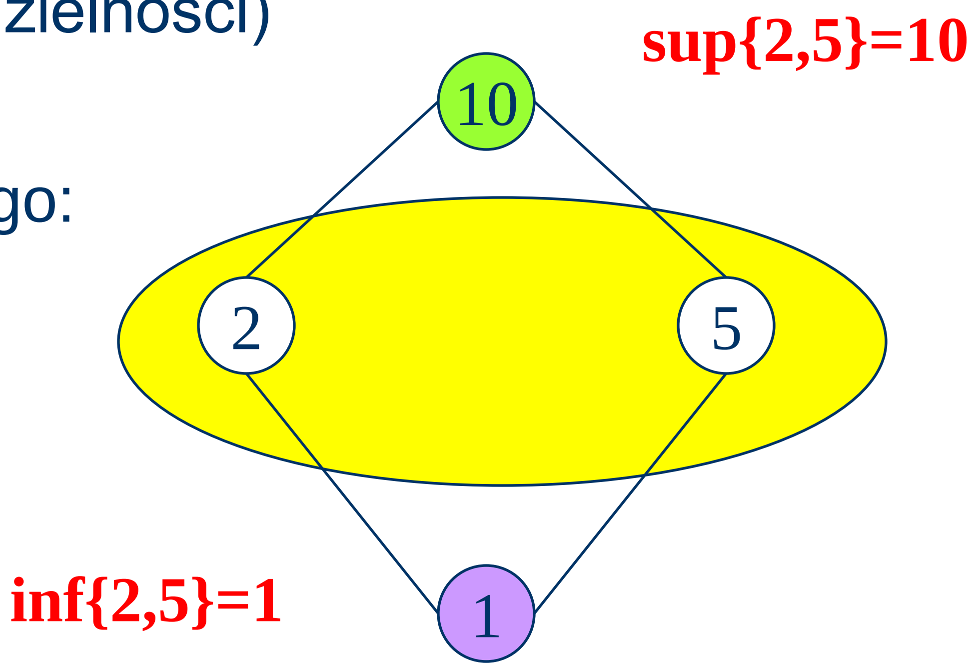


Przykład

Zbiór: {1,2,5,10}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego:



Krata

Definicja

Zbiór uporządkowany, w którym dla dowolnych dwóch elementów istnieje kres górny i kres dolny nazywamy

kratą

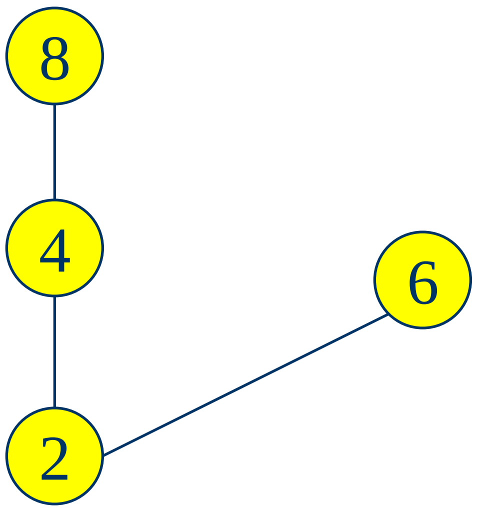
Przykład

Zbiór: {2,4,6,8}

Relacja: | (podzielności)

To nie jest krata!

Diagram Hassego



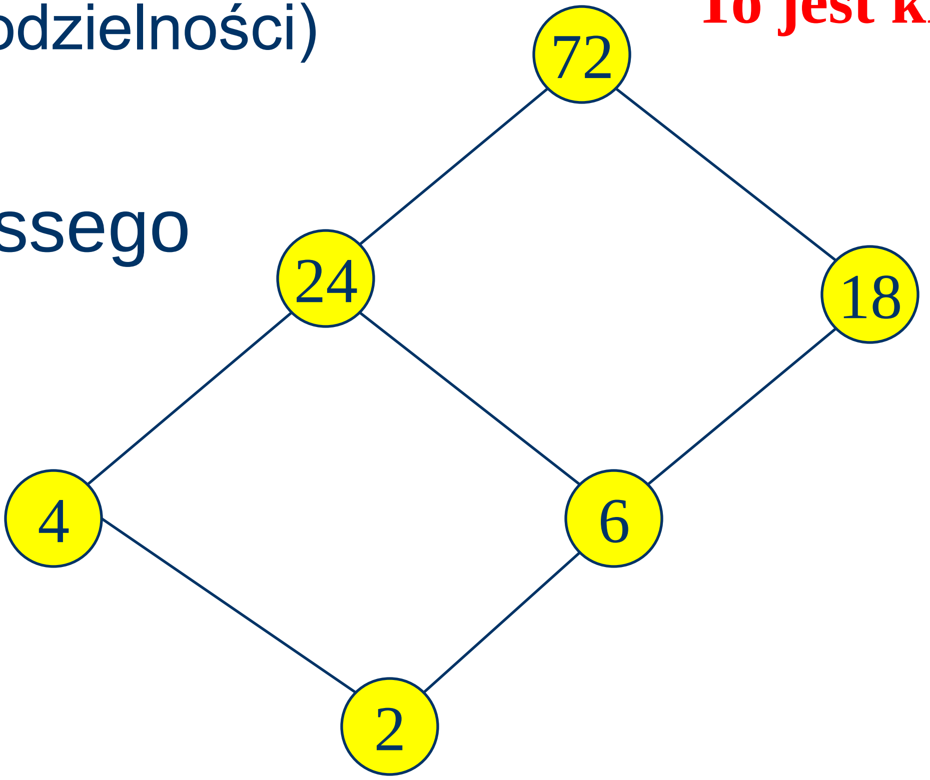
Przykład

Zbiór: {2,4,6,18,24,72}

Relacja: | (podzielności)

Diagram Hassego

To jest krata!



Porządek liniowy i dobry porządek

Definicja

Relację binarną r w zbiorze X nazywamy

porządkiem liniowym

wtedy i tylko wtedy, gdy

1. r jest relacją porządku częściowego,
2. r jest relacją spójną, tzn. dla dowolnych $x,y \in X$

$$(x,y) \in r \text{ lub } (y,x) \in r \text{ lub } x = y.$$

Lemat

Niech (X,r) będzie zbiorem liniowo uporządkowanym, wtedy

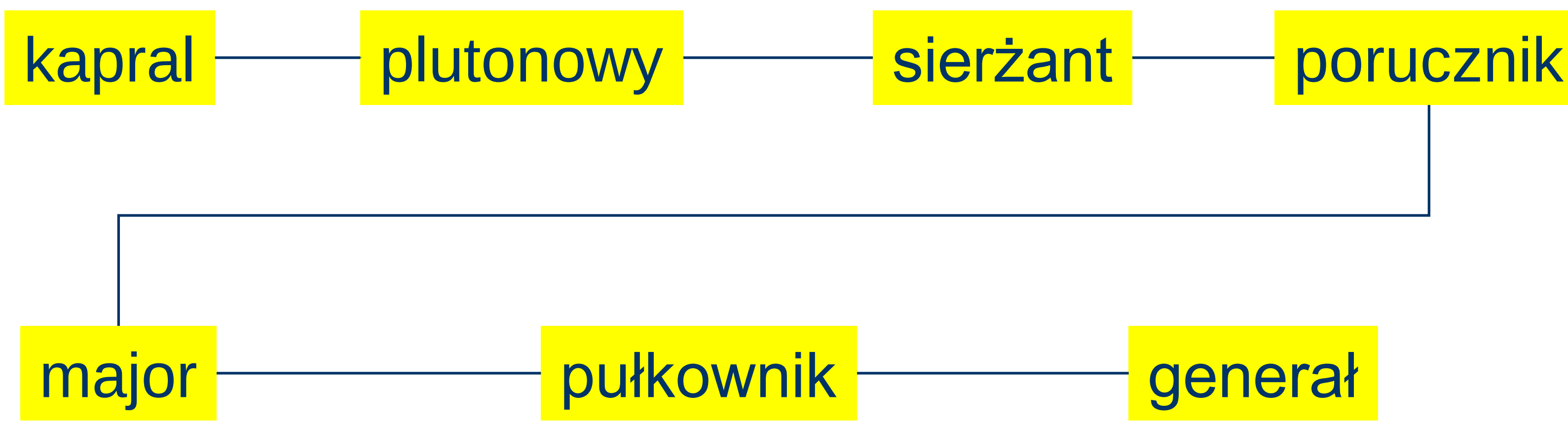
1. jeśli w X istnieje element maksymalny, to jest on elementem największym,
2. jeśli w X istnieje element minimalny, to jest on elementem najmniejszym.

Przykład

Zbiór: {14,11,12,13,10}

Relacja: ≤

Przykład:


kapral
plutonowy
sierżant
porucznik
major
pułkownik
generał

Definicja

Relacją binarną w X nazywamy

dobrym porządkiem

wtedy i tylko wtedy, gdy jest

to porządek liniowy i dobrze ufundowany,

tzn.

każdy niepusty podzbiór zbioru X

ma element pierwszy.

Przykład

Zbiór $\{4,5,6,7\}$ z relacją $\leq$
jest dobrym porządkiem.

Zbiór $(4,7)$ z relacją $\leq$
NIE jest dobrym porządkiem.

Szczególne porządki

Porządek produktowy

Niech (U_1,r_1), (U_2,r_2) , ..., (U_k,r_k) będą zbiorami częściowo uporządkowanymi.

Porządkiem produktowym

zdefiniowanym w zbiorze $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_k$ nazywamy relację **r** taką że

$$(x_1,x_2,\ldots, x_k)\ r\ (x'_1,x'_2,\ldots, x'_k)$$

wttw, gdy

$$(x_1,x'_1)\in r_1\ ,\ (x_2,x'_2)\in r_2,\ \ldots\ldots,\ (x_k,x'_k)\in r_k.$$

Porządek produktowy

Rozważmy zbiory (U_1, r_1), (U_2, r_2),
gdzie $U_1=U_2=\{1,2,3,5,7\}$ oraz $r_1 = r_2 = \leq$.

(3,2)

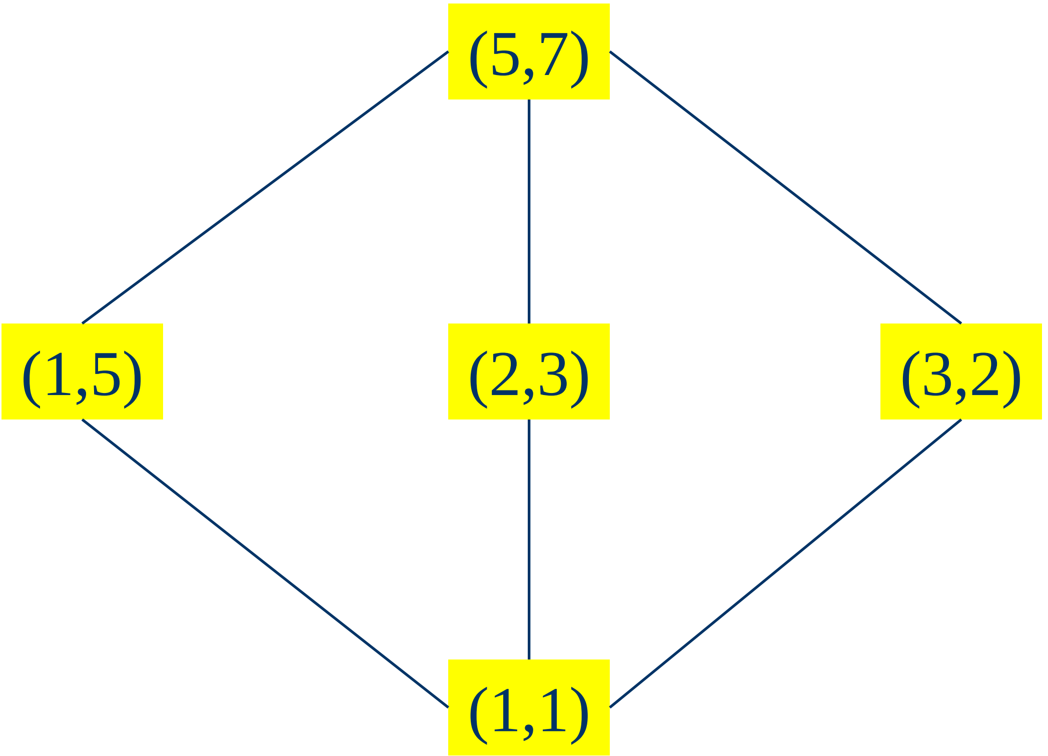
(1,1)

(5,7)

(1,5)

(2,3)

Porządek produktowy



Porządek słownikowy

Niech (U_1,r_1), (U_2,r_2) , ..., (U_k,r_k) będą zbiorami częściowo uporządkowanymi.

Porządkiem słownikowym

zdefiniowanym w zbiorze $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_k$

nazywamy relację **r** taką że

$$(x_1,x_2,\ldots, x_k)\ r\ (y_1,y_2,\ldots,y_k)$$

wttw, gdy

$$x_i=y_i \text{ dla każdego } i=1,\ldots,k$$

lub

istnieje m $(1 \leq m \leq k)$ takie, że $x_m \neq y_m$ i $(x_m,y_m) \in r_m$

i dla każdego $i=1,\ldots,m-1$, $x_i = y_i$.

Porządek słownikowy

101

000

010

110

001

Porządek słownikowy

000 — 001 — 010 — 101 — 110

Porządek leksykograficzny

Niech Σ będzie ustalonym alfabetem uporządkowanym liniowo przez relację r.
W zbiorze Σ^* definiujemy relację r_L, porządku leksykograficznego, następująco

$$(x_1,x_2,\ldots x_n)\ r_L\ (y_1,y_2,\ldots y_m)$$

wttw albo

$$n \leq m \text{ i dla wszystkich } 0<i\leq n\ ,\ x_i=y_i$$

albo istnieje takie $0<k \leq \min(n,m)$, że dla każdego i, $0<i<k$,

$$x_i = y_i \text{ oraz } (x_k,y_k)\in r,\ x_k \neq y_k.$$

Porządek leksykograficzny

babb

ab

b

aac

abc

Porządek leksykograficzny

aac ab abc b babb

Porządek leksykograficzny

marynarz

bosman

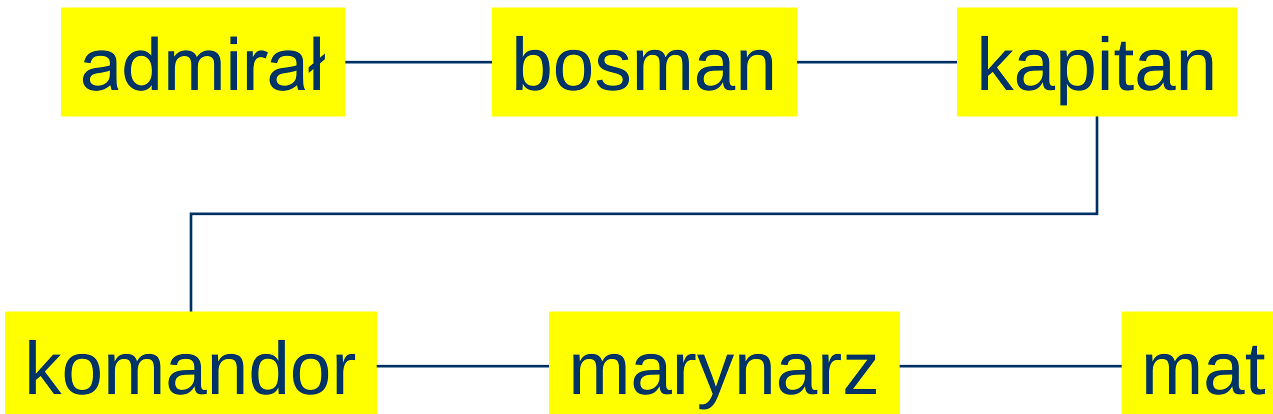
mat

kapitan

komandor

admirał

Porządek leksykograficzny



Porządek standardowy

Niech Σ będzie ustalonym alfabetem uporządkowanym liniowo przez relację r.
W zbiorze Σ^* definiujemy relację r*, porządku standardowego, następująco

$$(x_1,x_2,\ldots x_n)\ r^*\ (y_1,y_2,\ldots y_m)$$

wttw albo

$$n < m$$

albo $n=m$ i $(x_1,x_2,\ldots x_n)\ r_n\ (y_1,y_2,\ldots y_n)$,
gdzie r_n jest porządkiem słownikowym w Σ^n.

Porządek standardowy

babb

ab

b

aac

abc

Porządek standardowy

b — ab — aac — abc — babb

Porządek standardowy

marynarz

bosman

mat

kapitan

komandor

admirał

Porządek standardowy