Algebra zbiorów

Materiały pomocnicze do wykładu

uczelnia: **PJWSTK**
przedmiot: **Matematyka Dyskretna 1**
wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Teoria mnogości

- Teoria mnogości
  jest działem matematyki
  zajmującym się badaniem
  własności zbiorów.

- Podstawy teorii
  mnogości stworzył
  niemiecki matematyk
  Georg Cantor
  w latach 1871-1883

Teoria mnogości

- Wprowadził m.in. Pojęcia: równoliczności i przeliczalności zbiorów, mocy zbioru i liczby kardynalnej, uporządkowania zbioru i zbioru dobrze uporządkowanego, punktu skupienia zbioru itd.

- Jego badania wywarły olbrzymi wpływ na na rozwój matematyki, szczególnie topologii, teorii funkcji rzeczywistych, teorii struktur itp.

- „W teorii liczb umiejętność stawiania zagadnień jest ważniejsza niż umiejętność ich rozwiązywania”.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

3.03.1845 (Sankt Petersburg)-
6.01.1918 (Halle)

Teoria mnogości

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

3.03.1845 (Sankt Petersburg)-
6.01.1918 (Halle)

Definicja zbioru wg Cantora:

Zbiorem jest spojenie w całość określonych rozróżnialnych podmiotów naszej poglądowości czy myśli, które nazywamy elementami danego zbioru.

Zbiór i jego elementy

Pojęcie zbioru

- Zbiór studentów, nauczycieli, programów, komputerów itp.

Pojęcie zbioru

- Zbiór państw należących do Unii Europejskiej (rok 2009)

zbiór

Austria, Belgia, Bułgaria, Cypr, Czechy,
Dania,Estonia, Finlandia, Francja, Niemcy, Grecja, Węgry,
Irlandia, Włochy, Litwa, Łotwa, Luksemburg, Malta, Holandia, Polska,
Portugalia, Rumunia, Słowacja, Słowenia, Hiszpania,
Szwecja, Wielka Brytania

elementy zbioru

27

Ile ten zbiór ma elementów?

Pojęcie zbioru

- **Zbiór** jest pojęciem pierwotnym, tzn. nie podajemy jego formalnej definicji. Intuicyjnie powiemy, że

  zbiór jest kolekcją pewnych obiektów.

- Obiekty, które należą do pewnego zbioru nazywamy **elementami** tego zbioru. Pojęcie elementu zbioru również jest pojęciem pierwotnym.
- Zbiory będziemy oznaczać dużymi literami A, B, X a ich elementy małymi a,b,x itp..

Elementy zbioru

- Zdanie „element a należy do zbioru A” (lub „a jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \in A.$$

- Zdanie „element a nie należy do zbioru A” (lub „a nie jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \notin A.$$

Sposoby określania zbiorów

- przez wyliczenie elementów,
- przez podanie cech (własności) wyróżniających w pewien sposób elementy zbioru,
- przez podanie metody obliczania kolejnych elementów.

Sposoby określania zbiorów

- przez wyliczenie elementów:

A={Polska, Czechy, Niemcy}

B={Warszawa, Praga, Berlin}

A={3,4,5}

Sposoby określania zbiorów

- przez podanie cech (własności) wyróżniających w pewien sposób elementy zbioru,

  A={x : x jest stolicą państwa położnego w Europie}

  Z(2)={x : x jest liczbą całkowitą podzielną przez 2}

  Z_2={x : x jest resztą z dzielenia przez 2}

  Σ^*={x : x jest słowem nad alfabetem Σ}

Sposoby określania zbiorów

- przez podanie metody obliczania kolejnych elementów.

  1. Przyjmij i =1.
  2. Wylicz 2i-1 i dołącz do tworzonego zbioru.
  3. Zwiększ i o 1.
  4. Zakończ, jeśli i=6, lub powtórz od punktu 2, jeśli i<6.

  $X= \{2i-1: i=1,2,3,4,5\}=\{1,3,5,7,9\}$

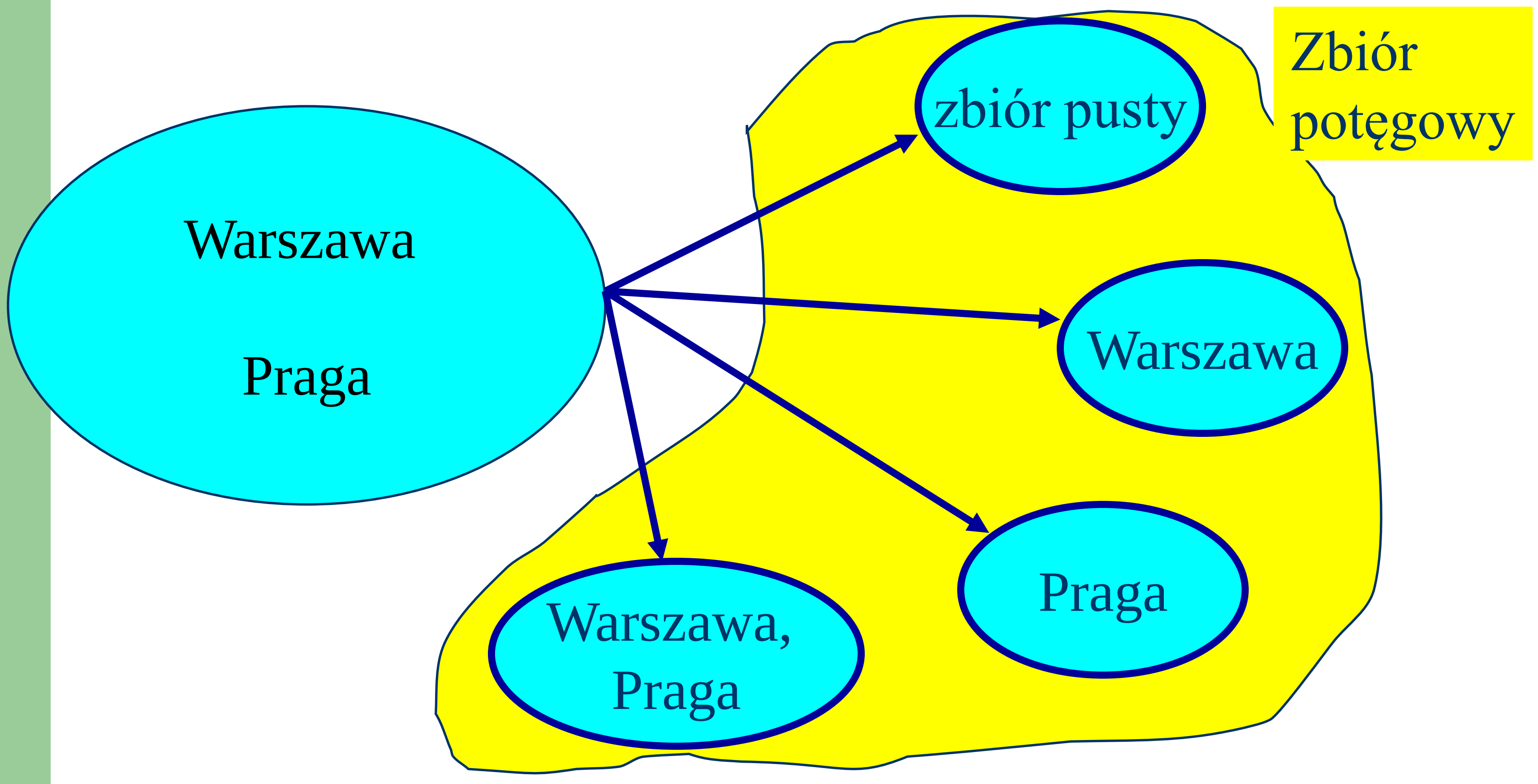
Zbiory wyróżnione

Zbiór pusty

- Zbiór **pusty** – zbiór, do którego nie należy żaden element. Istnieje tylko jeden taki zbiór, oznaczamy go $\varnothing$.

  {x: x jest liczbą naturalną, której kwadrat jest liczbą ujemną} = $\varnothing$

Zbiór potęgowy



Zbiór potęgowy

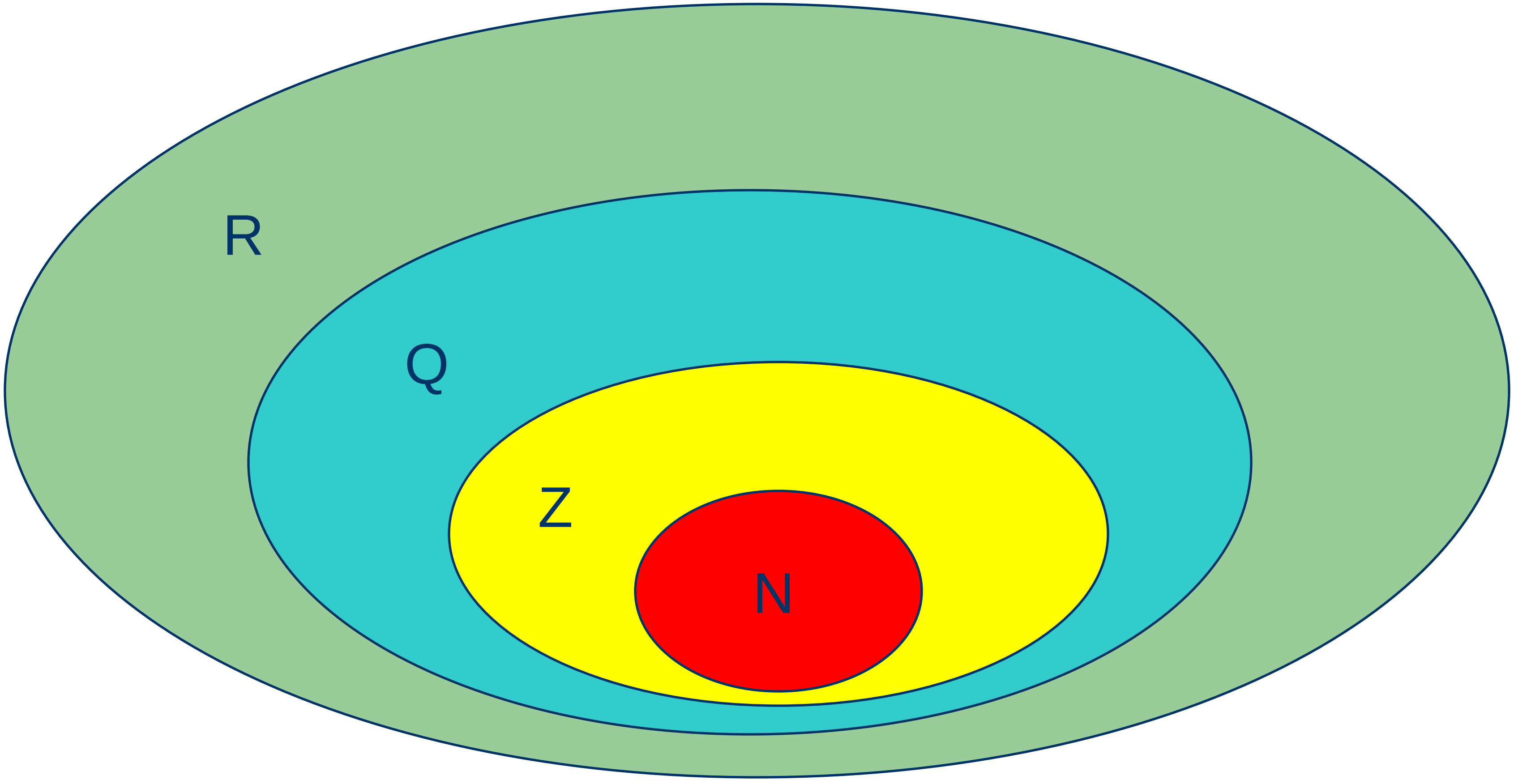
- **Zbiorem potęgowym** nazywamy zbiór $P(A)$ złożony z wszystkich podzbiorów zbioru A.

  Zbiór potęgowy oznaczmy też czasem 2^A.

Zbiory liczbowe

- Zbiór liczb naturalnych $N = \{0,1,2,3,...\}$
- Zbiór liczb całkowitych $Z = \{...,-2,-1,0,1,2,3,....\}$ (naturalne i przeciwne do nich)
- Zbiór liczb wymiernych $Q = \{m/n : m,n \in Z \text{ i } n \neq 0\}$, np. ¾; 0.1; 5 i
- Zbiór liczb niewymiernych NQ – wszystkie liczby nie dające się przedstawić w postaci ułamka m/n, gdzie $m,n \in Z$ i $n \neq 0$
- Zbiór liczb rzeczywistych $R = Q \cup NQ$
- N_+ , Z_+ , R_+ itp.

Zbiory liczbowe



Przedziały liczbowe

- Przedział otwarty:
  $$(a,b)=\{x \in R: a<x<b\}$$
- Przedział domknięty
  $$[a,b]=\{x \in R: a \leq x \leq b\}$$
- Przedział lewostronnie domknięty
  $$[a,b)=\{x \in R: a \leq x < b\}$$
- Przedział prawostronnie domknięty
  $$(a,b]=\{x \in R: a<x \leq b\}$$
- Przedziały nieograniczone: (a,∞); $[a,\infty)$; (∞,a); $(\infty,a]$
- Zbiór dwuelementowy $\{a,b\}$.

Porównywanie zbiorów

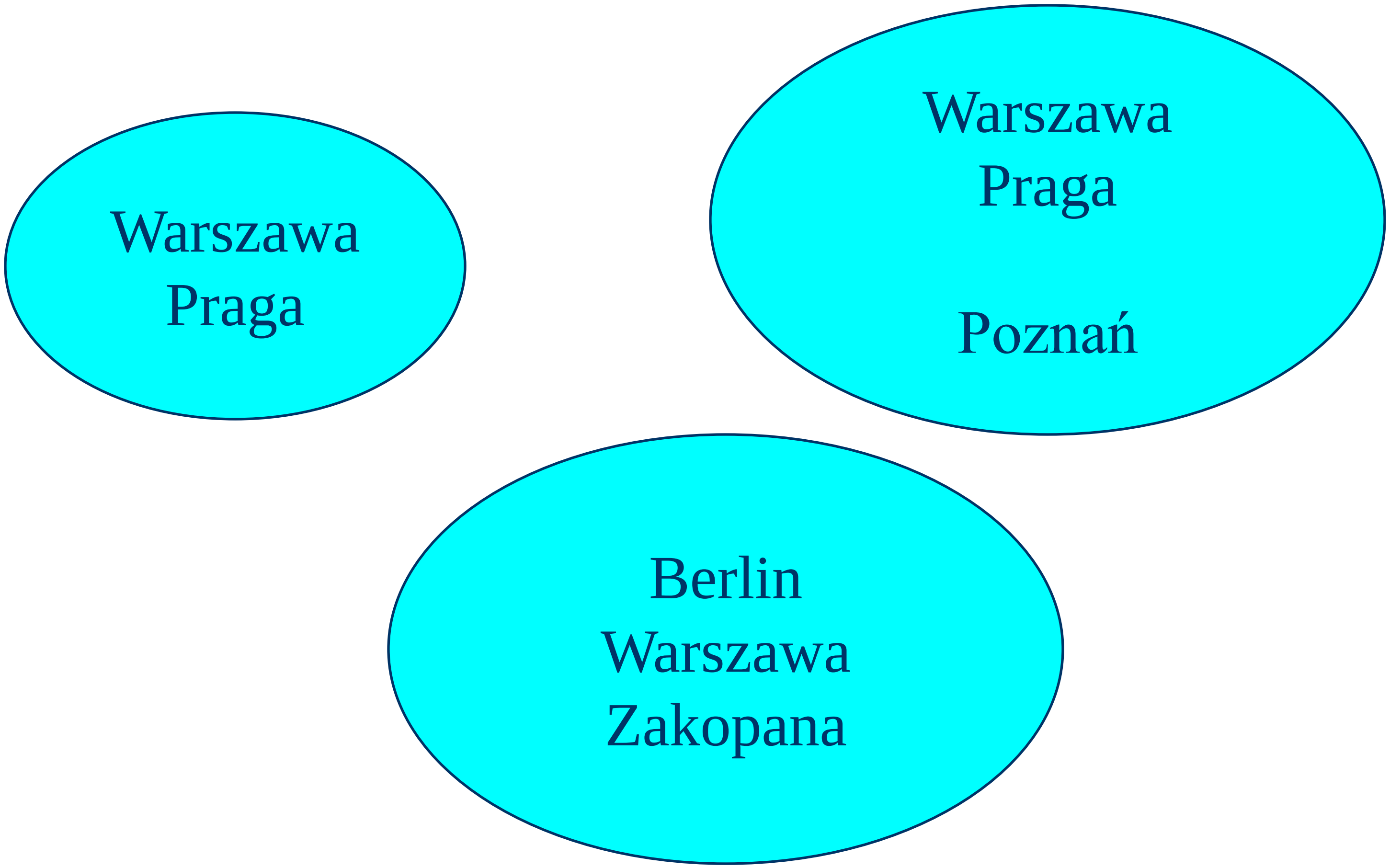
Równość zbiorów

Równość zbiorów

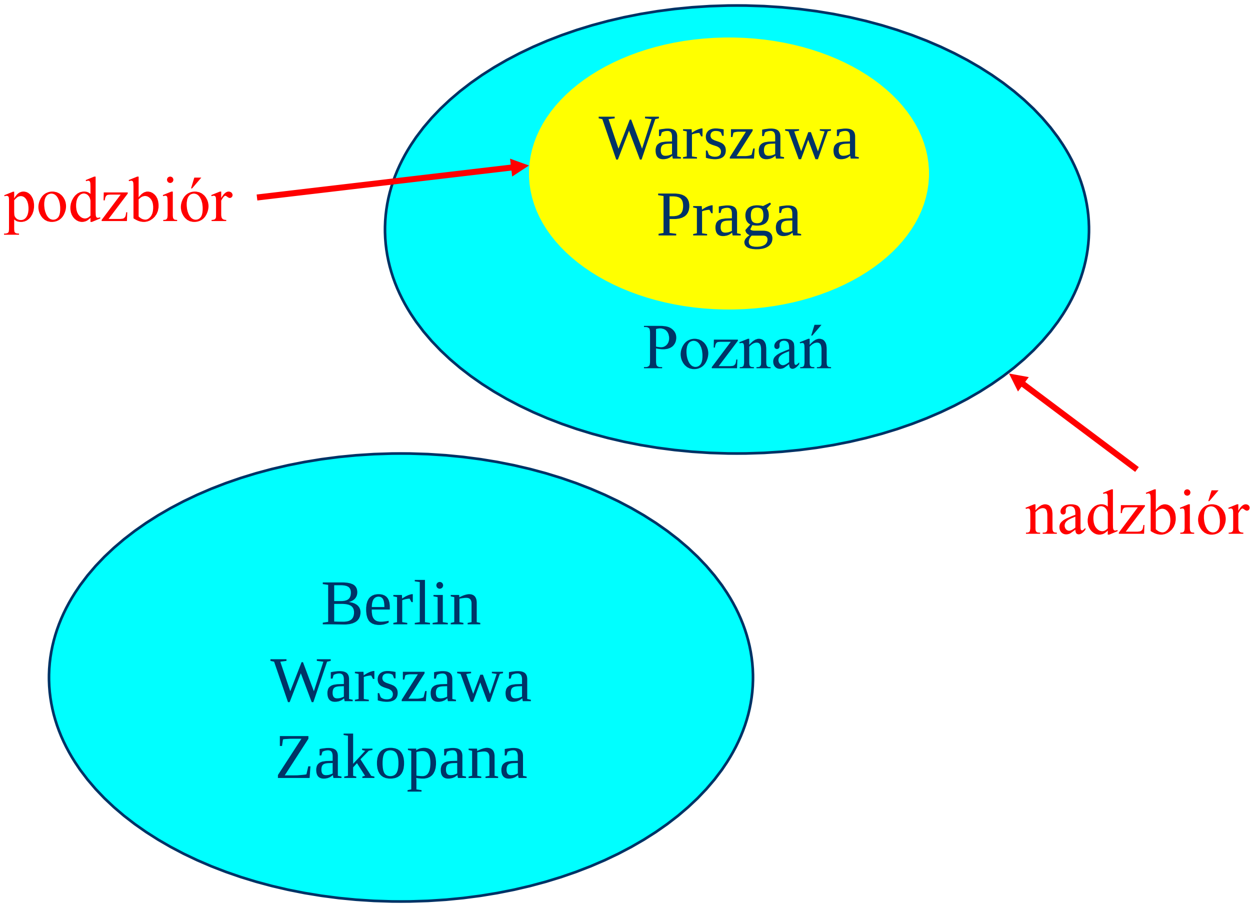
- Powiemy, że dwa zbiory X i Y są **równe**, $X = Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x, jeśli $x \in X$, to $x \in Y$ i jeśli $x \in Y$, to $x \in X$. Będziemy stosowali również nieco krótszy zapis symboliczny :

$$X=Y \text{ wttw } (x \in X \Rightarrow x \in Y) \text{ oraz } (x \in Y \Rightarrow x \in X).$$

Zawieranie zbiorów



Zawieranie zbiorów



Zawieranie zbiorów

- Powiemy, że zbiór X jest **zawarty** w Y (zbiór X jest **podzbiorem** zbioru Y) albo, że zbiór Y zawiera zbiór X (zbiór Y jest **nadzbiorem** zbioru X) i piszemy

  $X \subseteq Y$ wttw każdy element zbioru X jest równocześnie elementem zbioru Y.

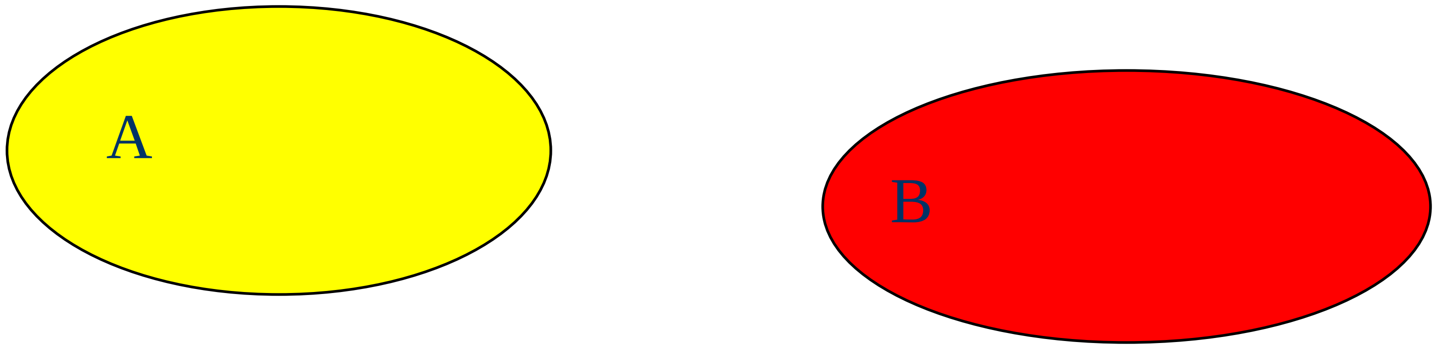
UWAGA: Warszawa $\in$ {Warszawa, Praga}, ale

{Warszawa} $\subseteq$ {Warszawa, Praga}

Zawieranie zbiorów

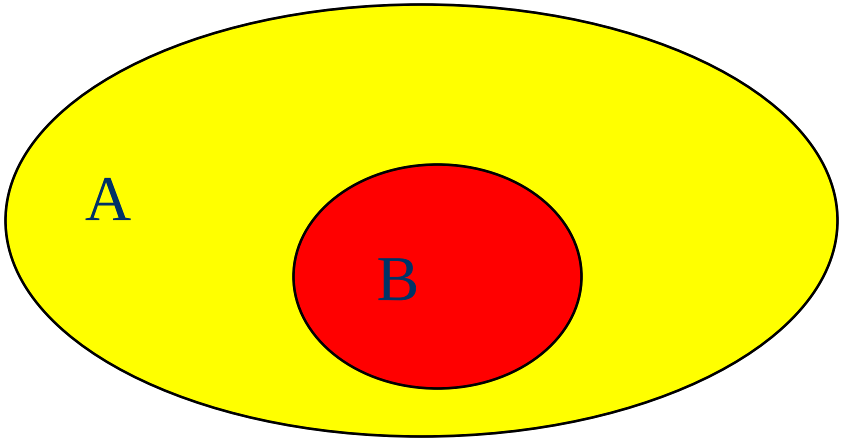
Jeżeli nie jest prawdą, że zbiór A zawiera się w zbiorze B, to możliwe są następujące 3 przypadki:

- A i B nie mają wspólnych elementów i w takim wypadku mówimy, że są to zbiory **rozłączne**,



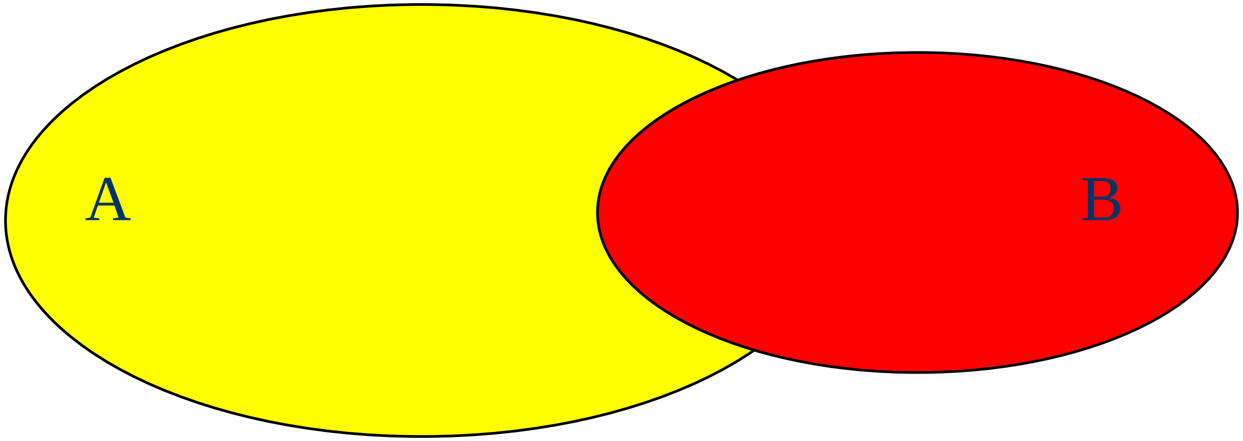
Zawieranie zbiorów

- A jest nadzbiorem zbioru B, czyli wszystkie elementy zbioru B są elementami A,



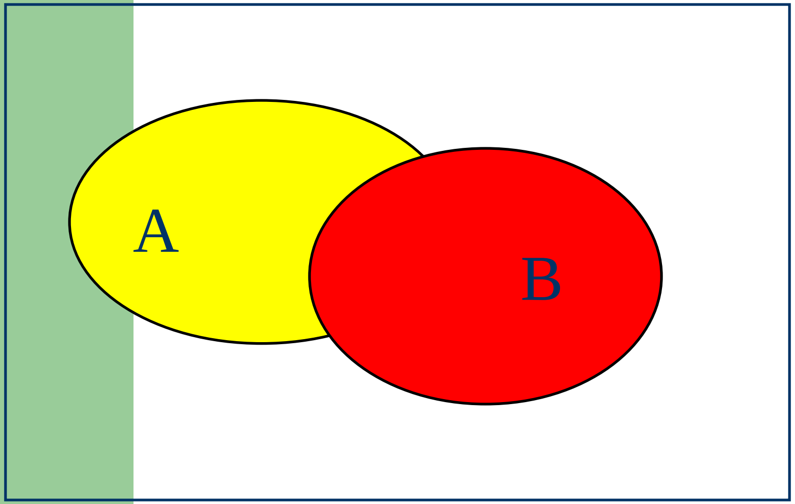
Zawieranie zbiorów

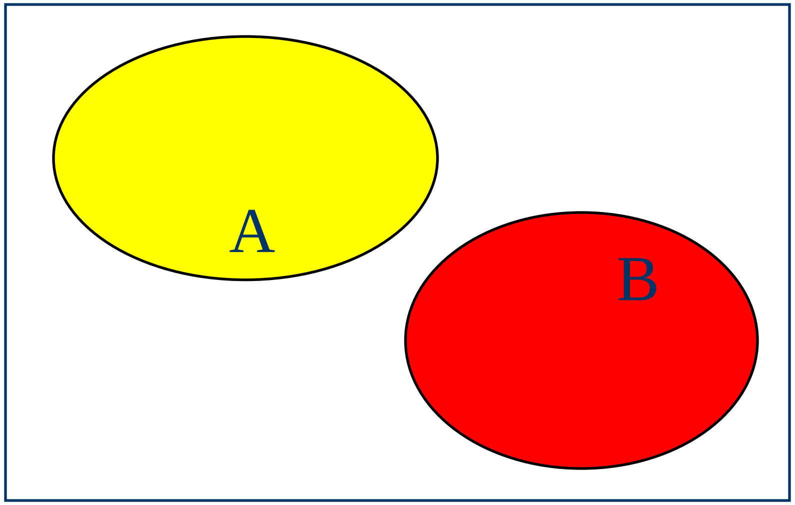
- A ma takie elementy, które nie należą do B i B ma takie elementy, które nie należą do A



Diagramy Venna

- Są to wykresy w postaci prostych figur geometrycznych ilustrujące zależności między zbiorami





Zawieranie zbiorów

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące zależności:

- $\emptyset \subseteq A$,
- $A \subseteq A$,
- Jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$.

Operacje na zbiorach

Suma zbiorów

Alicja

Anastacia,
Christina Aquilera,
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira

Piotr

Christina Aquilera,
Kylie Minogue
Maria Carey,
Shakira,
Gwen Stefani

Anastacia,
Christina Aquilera,
Kylie Minogue
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira, Gwen Stefani

Suma zbiorów

Suma zbiorów

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$. Krótko zapiszemy

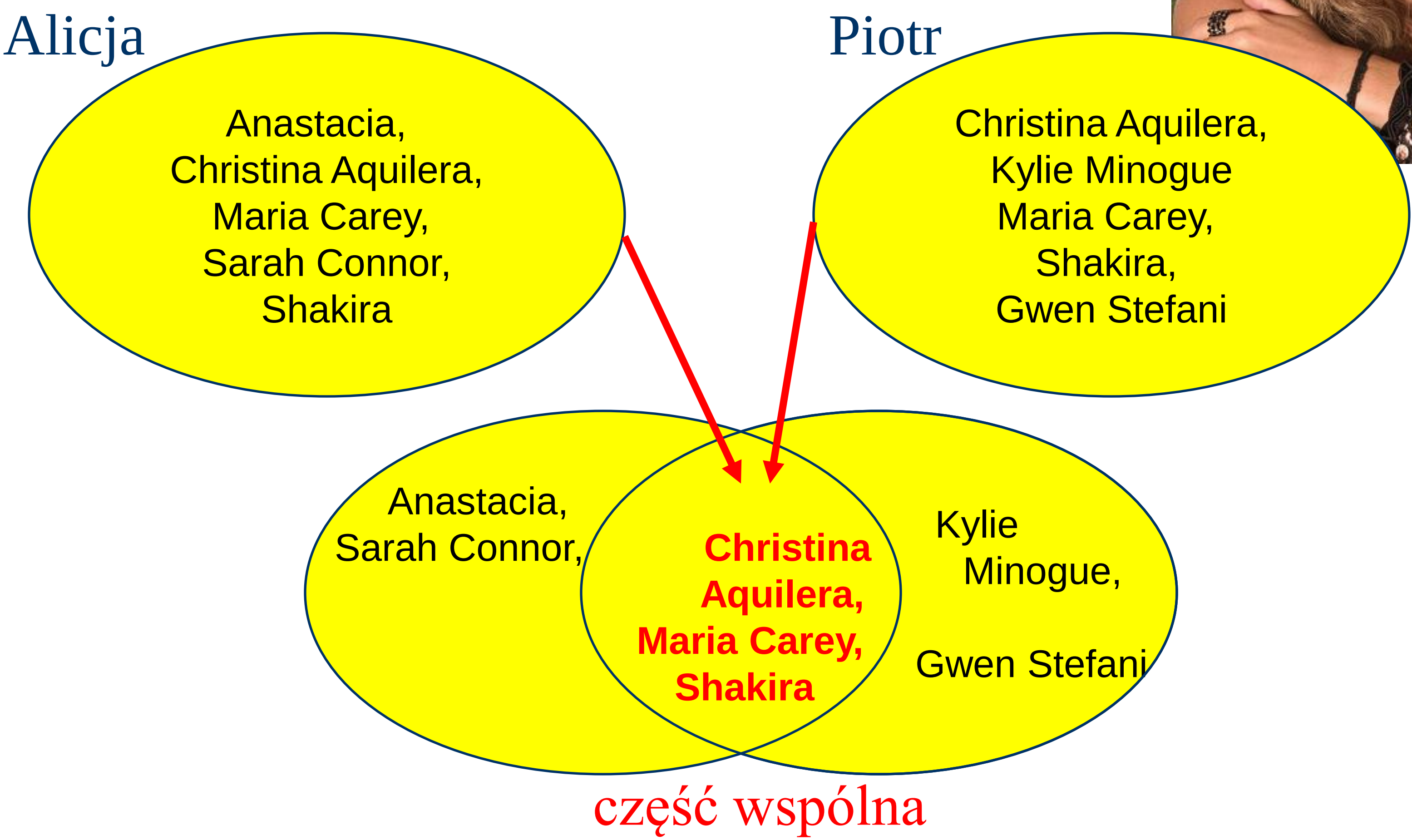
$$x \in A \cup B \text{ wttw } x \in A \text{ lub } x \in B.$$

Suma zbiorów

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

- $\emptyset \cup A = A$
- $A \cup A = A$ (prawo idempotentności)
- $A \cup B = B \cup A$ (prawo przemienności)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (prawo łączności)

Iloczyn zbiorów



Iloczyn zbiorów

Alicja

Anastacia,
Christina Aquilera,
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira

Piotr

Christina Aquilera,
Kylie Minogue
Maria Carey,
Shakira,
Gwen Stefani

**Christina Aquilera,
Maria Carey,
Shakira**

część wspólna

Iloczyn zbiorów

Iloczynem lub przecięciem zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B$ składający się z elementów, które należą równocześnie do A i do B,

$$x \in A \cap B \text{ wttw } x \in A \text{ i } x \in B.$$

Iloczyn zbiorów

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

- $\varnothing \cap A = \varnothing$
- $A \cap A = A$ (idempotentność)
- $A \cap B = B \cap A$ (przemienność)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (łączność)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (rozdzielność)

Różnica zbiorów

Alicja

Anastacia,
Christina Aquilera,
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira

Piotr

Christina Aquilera,
Kylie Minogue
Maria Carey,
Shakira,
Gwen Stefani

Anastacia,
Sarah Connor

Christina
Aquilera,
Maria Carey,
Shakira

Kylie
Minogue,

Gwen Stefani

Różnica zbiorów
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Różnica zbiorów

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór A\B, którego elementami są te elementy zbioru A, które nie są elementami zbioru B:

$$x \in A \setminus B \text{ wttw } x \in A \text{ i } x \notin B$$

Różnica zbiorów

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości (prawa de Morgana):

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Różnica zbiorów

Pokażemy, że $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

Jeśli $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, to

$x \in (A \setminus B)$ i $x \in (A \setminus C)$,

$x \in A$ i $x \notin B$ oraz $x \in A$ i $x \notin C$,

$x \in A$ oraz $x \notin B$ i $x \notin C$.

Stąd $x \in A$ i $x \notin (B \cup C)$,

czyli $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Różnica zbiorów

Pokażemy, że dla dowolnych zbiorów A,B,C,D, jeśli $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$, to $A \setminus D \subseteq B \setminus C$.

Załóżmy, że $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$ i rozważmy dowolny element $x \in A \setminus D$. Wtedy $x \in A$ i $x \notin D$.

Skoro $x \in A$, to $x \in B$, bo $A \subseteq B$.

Skoro $x \notin D$, to $x \notin C$, bo $C \subseteq D$.

Mamy więc ostatecznie, $x \in B$ i $x \notin C$, co oznacza, że $x \in B \setminus C$.

Dopełnienie zbiorów

Piosenkarki

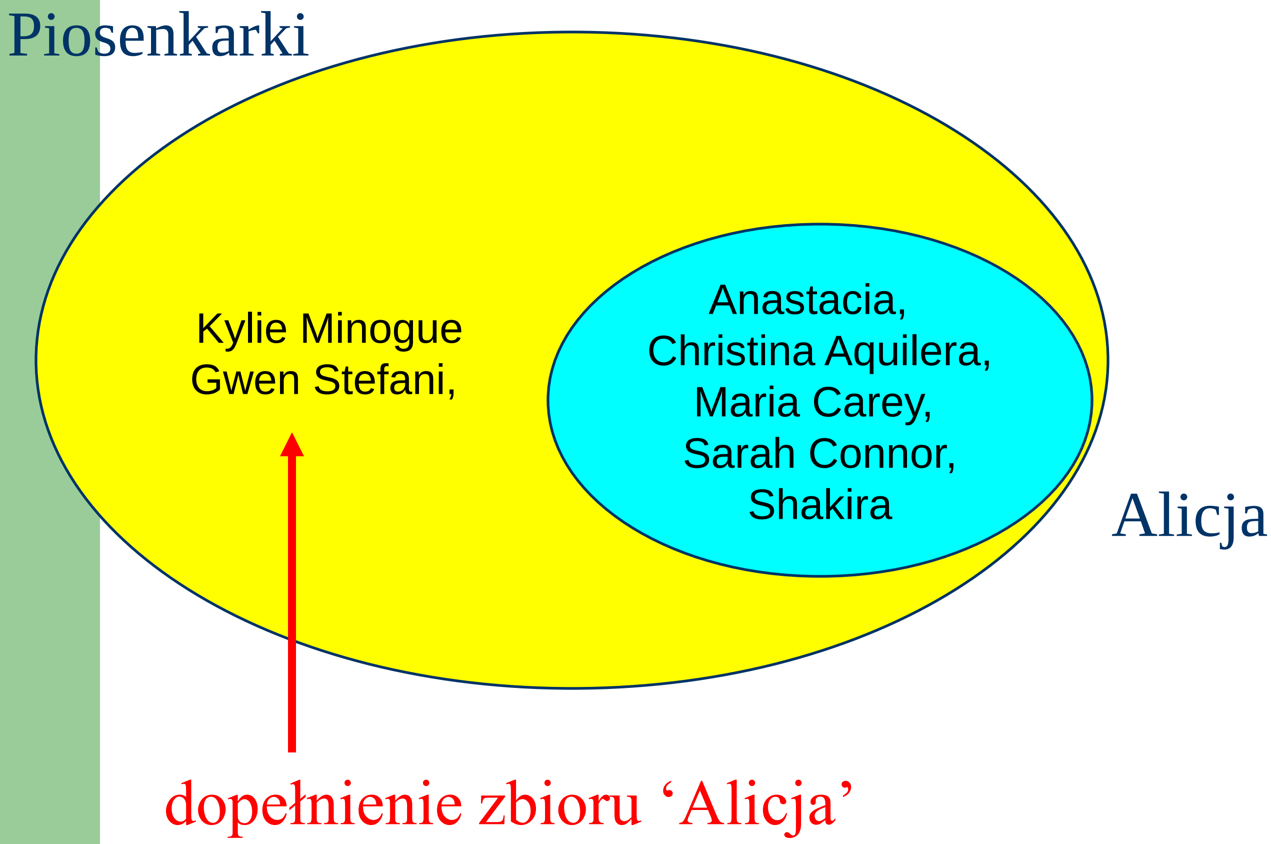
Kylie Minogue
Gwen Stefani,

Anastacia,
Christina Aquilera,
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira

Alicja

Anastacia,
Christina Aquilera,
Maria Carey,
Sarah Connor,
Shakira

Dopełnienie zbiorów



Dopełnienie zbiorów

- Niech **U** będzie pewnym ustalonym zbiorem, który będziemy nazywać **zbiorem uniwersalnym** (również uniwersum, przestrzeń). Dla zbioru $A \subseteq U$ różnicę zbiorów $U \setminus A$ nazywamy **dopełnieniem** lub uzupełnieniem zbioru A i oznaczamy **A'**.

- Wówczas różnica zbiorów może być zapisana za pomocą dopełnienia:

$$A \setminus B = A \cap B'$$

Dopełnienie zbiorów

Dla dowolnych zbiorów A, B $\subseteq$ U prawdziwe są równości:

- $(A')' = A$ – prawo podwójnego dopełnienia
- $A \cup A' = U$
- $A \cap A' = \varnothing$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – prawa de Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Dopełnienie zbiorów

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ lub } x \notin B \Leftrightarrow$$
$$x \in A' \text{ lub } x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$$

Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański

Anastacia,

Maria Carey,

Shakira

1

2

3

(Anastacia,1); (Anastacia,2); (Anastacia,3);

(Maria Carey,1); (Maria Carey, 2); (Maria Carey,3);

(Shakira,1); (Shakira, 2); (Shakira,3)

iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański

Iloczynem (produktem) kartezjańskim zbiorów X i Y, oznaczanym przez $X \times Y$, nazywamy zbiór złożony z wszystkich par uporządkowanych (x,y) takich, że $x \in X$ i $y \in Y$,

$$(x,y) \in X \times Y \text{ wttw } x \in X \text{ i } y \in Y.$$

UWAGA: $(a,b) \neq (b,a)$

Iloczyn kartezjański

Dla dowolnych zbiorów X, A, B zachodzą równości:

- $X \times (A \cup B) = (X \times A) \cup (X \times B)$,
- $X \times (A \cap B) = (X \times A) \cap (X \times B)$,
- $X \times (A \setminus B) = (X \times A) \setminus (X \times B)$.

Działania uogólnione

Suma uogólniona

Niech

$A_1=\{x\in\mathbb{N}: x>1\}=\{2,3,4,5,6...\}$

$A_2=\{x\in\mathbb{N}: x>2\}=\{3,4,5,6...\}$

$A_3=\{x\in\mathbb{N}: x>3\}=\{4,5,6...\}$

.....

$A_i=\{x\in\mathbb{N}: x>i\}=\{i+1,i+2,...\}$

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots.=$$

$$=\{2,3,4,5,6...\} \cup \{3,4,5,6...\} \cup \{4,5,6...\} \cup \ldots. =$$

$$\{2,3,4,5,6...\}= A_1$$

Suma uogólniona

Niech A będzie rodziną zbiorów indeksowaną elementami pewnego zbioru T, $A = \{A_t : t \in T\}$.

Sumą uogólnioną rodziny zbiorów A nazywamy zbiór

$$\bigcup_{t \in T} A_t$$

taki, że x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem co najmniej jednego zbioru rodziny A,

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \text{ wttw istnieje takie } k \in T, \text{ że } x \in A_k.$$

Iloczyn uogólniony

Niech

$A_1=\{x\in\mathbb{N}: x<1\}=\{0\}$

$A_2=\{x\in\mathbb{N}: x<2\}=\{0,1\}$

$A_3=\{x\in\mathbb{N}: x<3\}=\{0,1,2\}$

.....

$A_i=\{x\in\mathbb{N}: x<i\}=\{0,1,2,\ldots,i-1\}$

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap \ldots.=$$
$$=\{0\}\cap\{0,1\}\cap\{0,1,2\}\cap\ldots. = \{0\}= A_1$$

Iloczyn uogólniony

Iloczynem (przecięciem) uogólnionym rodziny zbiorów A nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t\in T} A_t$$

taki, że x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem każdego ze zbiorów rodziny A,

$$x \in \bigcap_{t\in T} A_t \text{ wttw dla wszystkich } k \in T,\ x \in A_k.$$