4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Numer wiersza	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$$

Rysunek 4.1 Funkcja $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2\bar{x}_3$$

$x = x + x$ tw. 7b

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2\bar{x}_3$$

$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$ tw. 12a | tw. 12a | tw. 12a

$$\bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2)\bar{x}_3 \qquad x_1(\bar{x}_2 + x_2)\bar{x}_3 \qquad x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 + x_3)$$

$x + \bar{x} = 1$ tw. 8b | $x + \bar{x} = 1$ tw. 8b | $x + \bar{x} = 1$ tw. 8b

$$\bar{x}_1 \cdot 1 \cdot \bar{x}_3 \qquad x_1 \cdot 1 \cdot \bar{x}_3 \qquad x_1\bar{x}_2 \cdot 1$$

$x \cdot 1 = x$ tw. 6a | $x \cdot 1 = x$ tw. 6a | $x \cdot 1 = x$ tw. 6a

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \qquad x_1\bar{x}_3 \qquad x_1\bar{x}_2$$

$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$ tw. 12a

$$(\bar{x}_1 + x_1)\bar{x}_3$$

$x + \bar{x} = 1$ tw. 8b

$$1 \cdot \bar{x}_3$$

$x \cdot 1 = x$ tw. 6a

$$\bar{x}_3$$

$$f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2$$

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

4.1 TABLICE KARNAUGH

x_1	x_2	
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

(a) Tablica wartości funkcji

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

(b) Tablica Karnaugha

Rysunek 4.2 Położenie mintermów dwu zmiennych

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

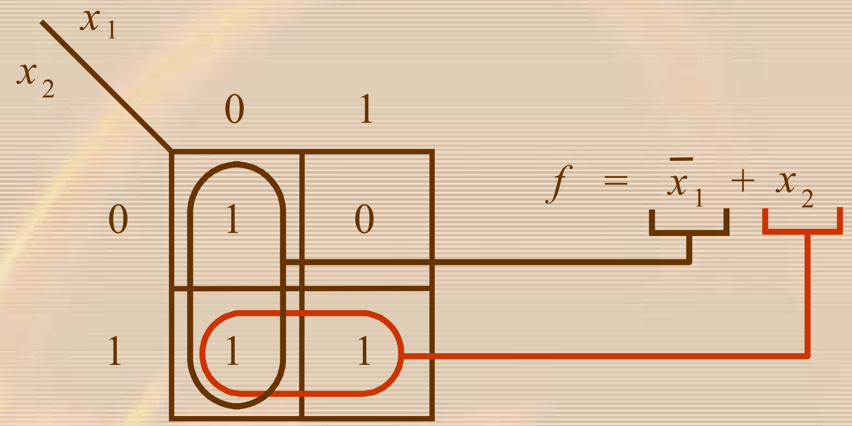
$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2$$

$$f = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) + (\bar{x}_1 + x_1)x_2$$

$$f = \bar{x}_1 \cdot 1 + 1 \cdot x_2$$

$$f = \bar{x}_1 + x_2$$



Rysunek 4.3 Przykład minimalizacji funkcji Σ *m*(0, 1, 3)

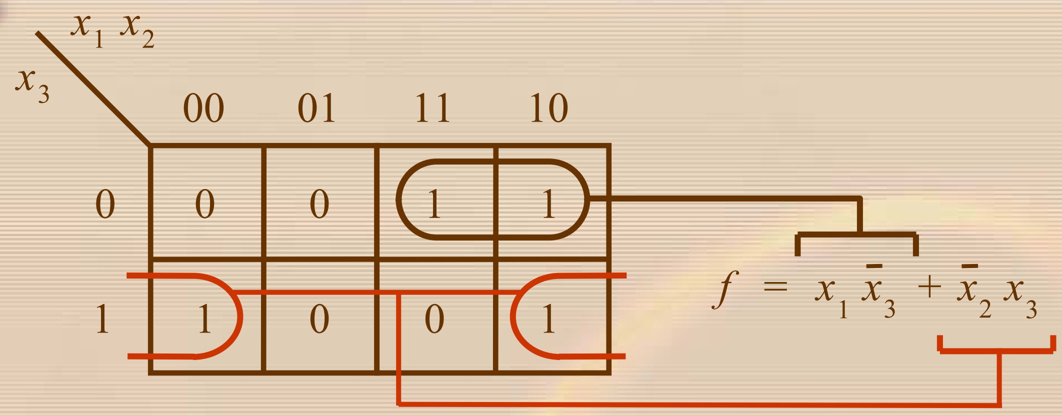
x_1	x_2	x_3	
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

(a) Tablica wartości funkcji

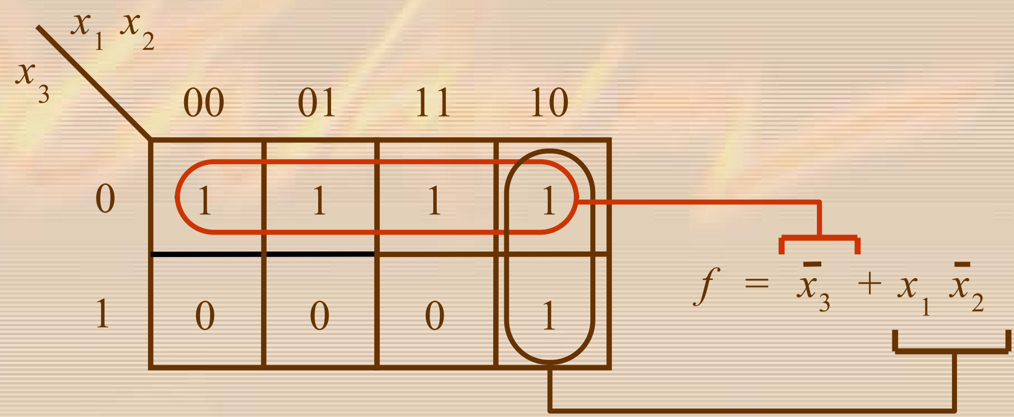
x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

(b) Tablica Karnaugha

Rysunek 4.4 Położenie mintermów trzech zmiennych



(a) Tablica Karnaugha funkcji $f = \Sigma\, m(1, 4, 5, 6)$



(b) Tablica Karnaugha funkcji $\Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$

Rysunek 4.5 Przykłady minimalizacji funkcji trzech zmiennych

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

x_1 x_2 x_3 x_4

Rysunek 4.6   Tablica Karnaugha dla czterech zmiennych

$\Sigma m(2, 3, 9, 10, 11, 13)$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f_1 = \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_3 x_4$$

$\Sigma m(2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$f_2 = x_3 + x_1 x_4$$

$\Sigma m(0, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 15)$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1

$$f_3 = \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 + x_2 x_3 x_4$$

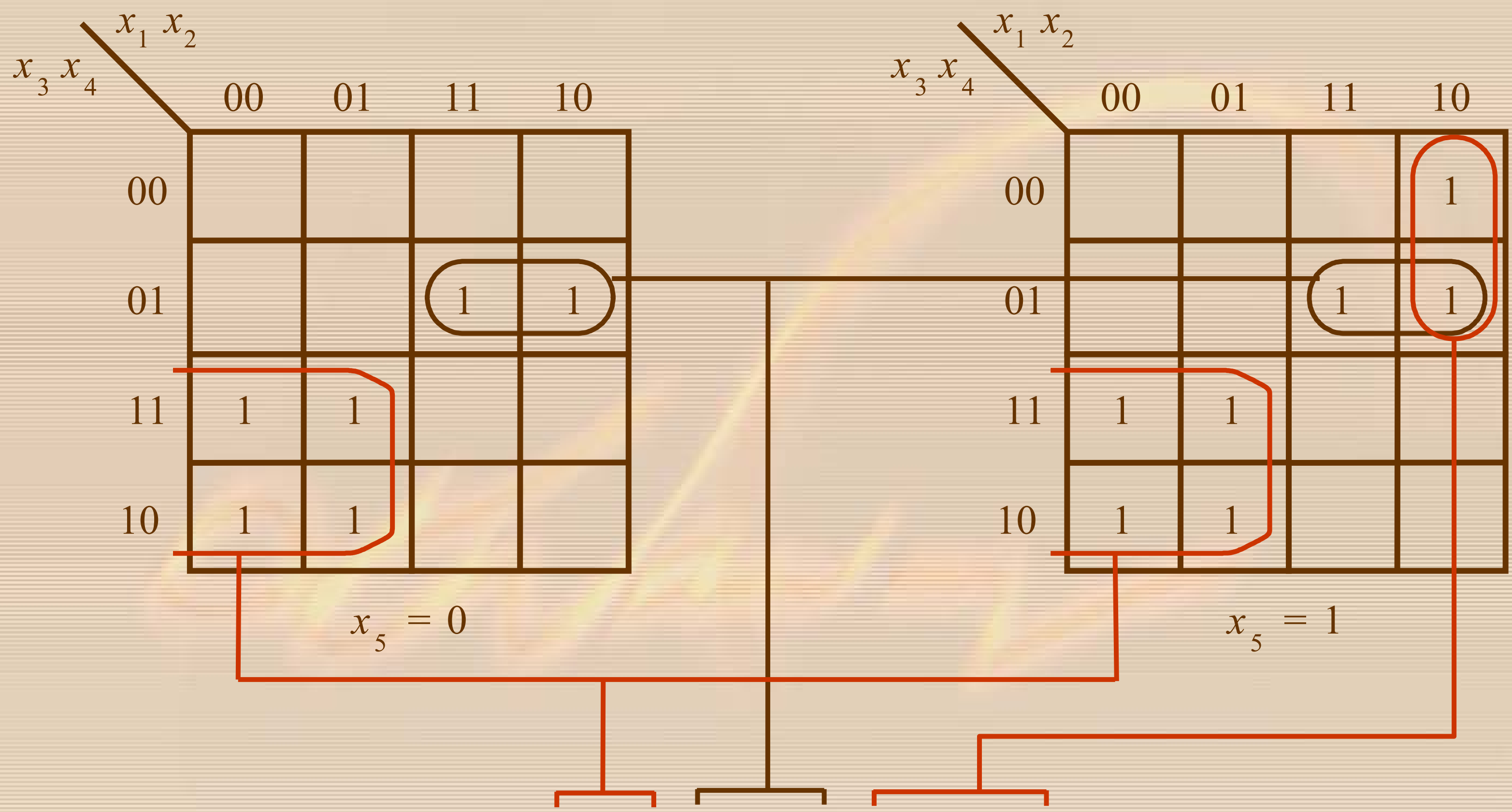
$\Sigma m(0, 1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$$f_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + x_1 x_3 + \begin{matrix} x_1 x_2 \\ \text{lub} \\ x_2 \bar{x}_3 \end{matrix}$$

Rysunek 4.7 Przykłady minimalizacji funkcji czterech zmiennych

$$\Sigma\, m(4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 25, 27)$$



$$f_1 = \bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5$$

Rysunek 4.8 Przykład minimalizacji funkcji pięciu zmiennych

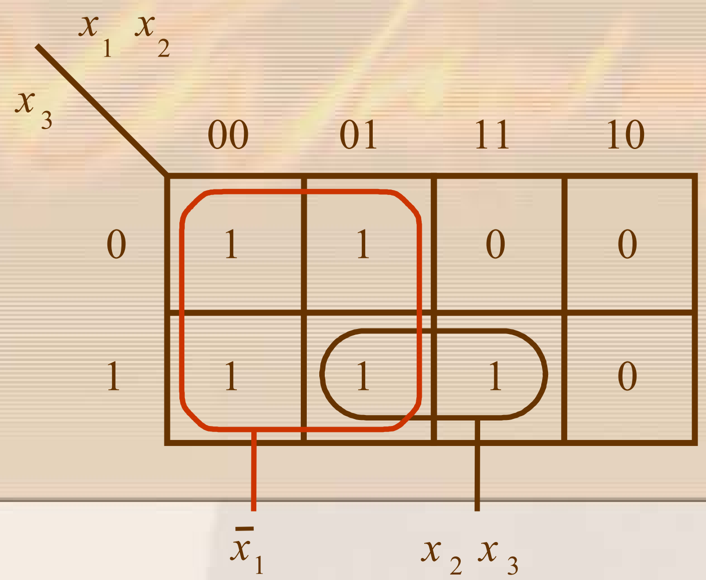
4.2 MINIMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Literał
to pojedyncza zmienna albo dopełnienie pojedynczej zmiennej.

Implikant
to iloczyn literałów, dla których wartość logiczna wynosi 1.

Implikant prosty
to implikant, który po odrzuceniu dowolnego literału przestaje być implikantem.

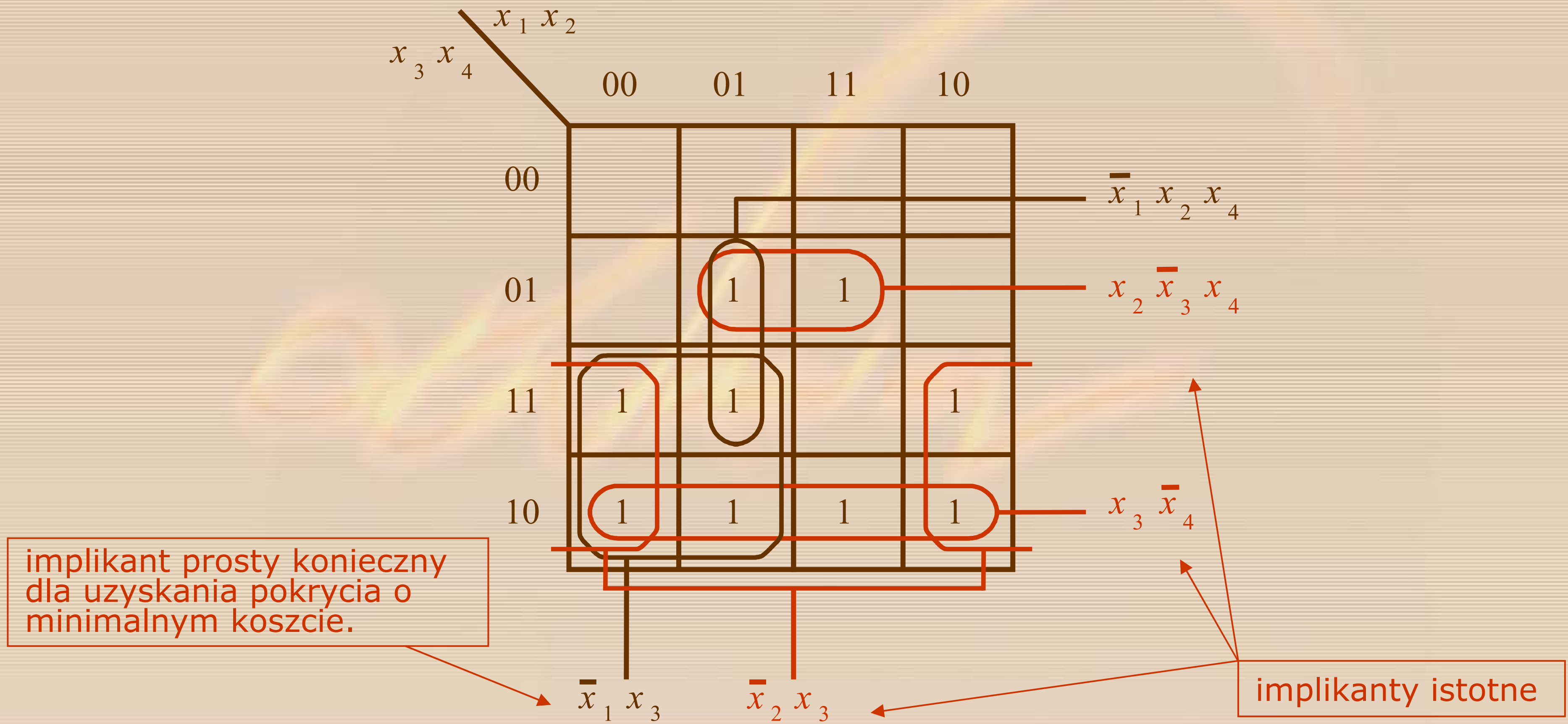
Pokrycie funkcji
to zbiór implikantów prostych, dla których funkcja przyjmuje wartość 1.



Rysunek 4.9 Minimalizacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 1, 2, 3, 7)$

Implikant istotny
to implikant prosty, który nie może być zastąpiony innymi implikantami prostymi.

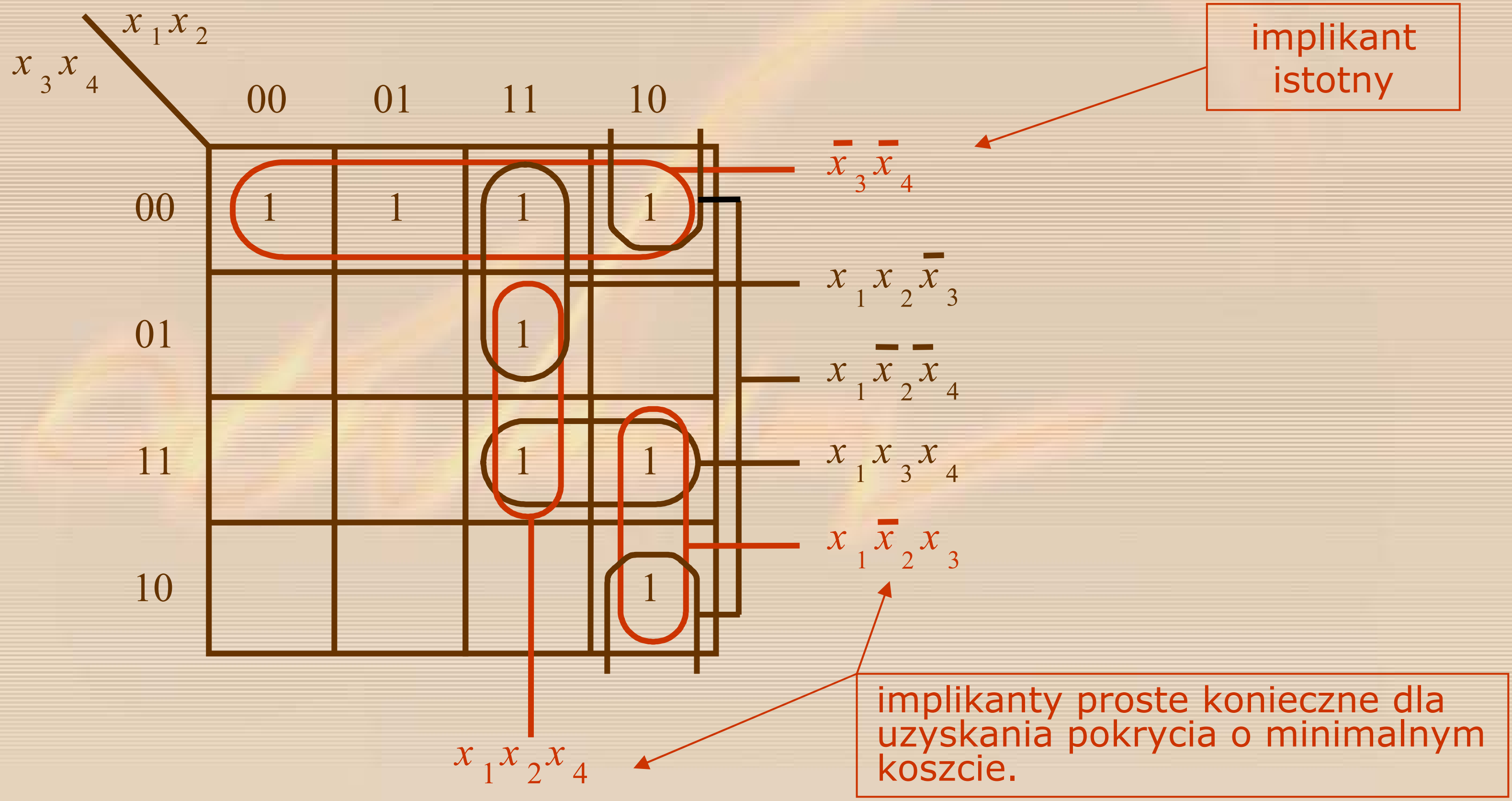
Koszt układu logicznego
to miara równa sumie liczby bramek i liczby wejść do wszystkich bramek.



Rysunek 4.10 Minimalizacja funkcji $f = \Sigma\, m(2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14)$

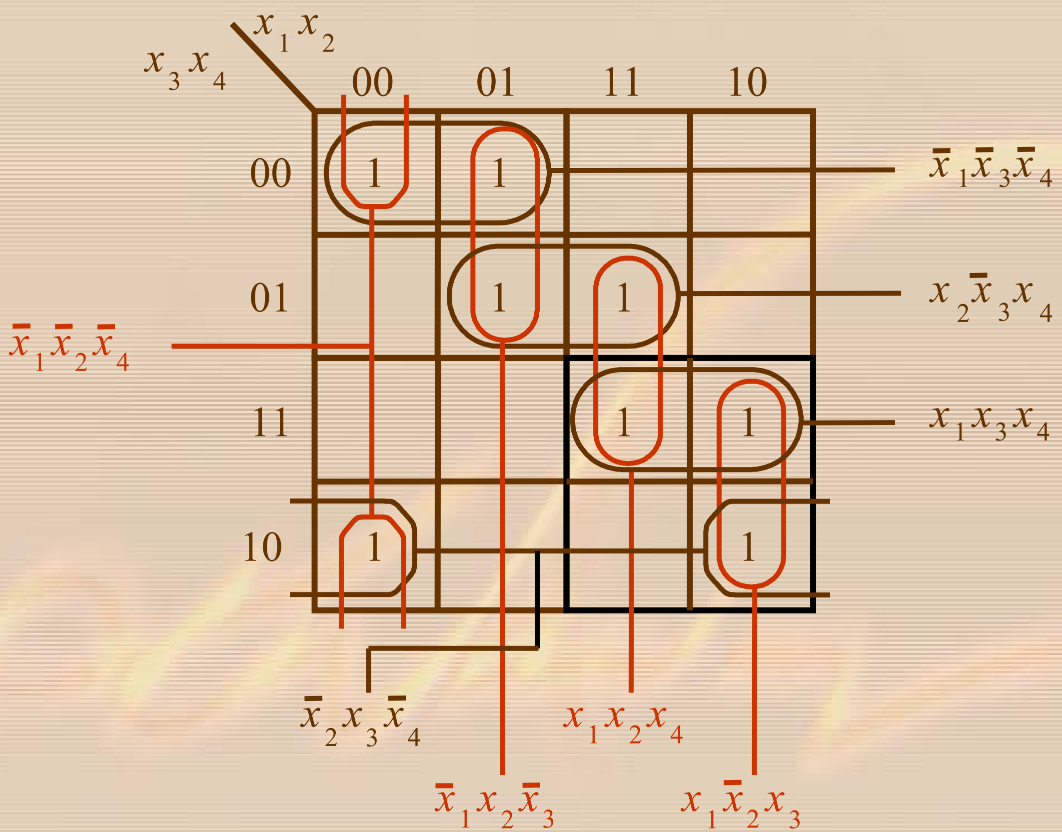
Procedura wyznaczania funkcji minimalnej

1. Wyznacz wszystkie implikanty proste.
2. Znajdź zbiór implikantów istotnych.
3. Jeżeli zbiór implikantów istotnych nie jest pokryciem funkcji to dołącz do niego tylko te implikanty proste, dla których koszt funkcji będzie minimalny.



Rysunek 4.11 Minimalizacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 4, 8, 10, 11, 12, 13, 15)$

Funkcja, która nie posiada implikantów istotnych



Dwa równorzędne rozwiązania

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_3x_4 + \bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

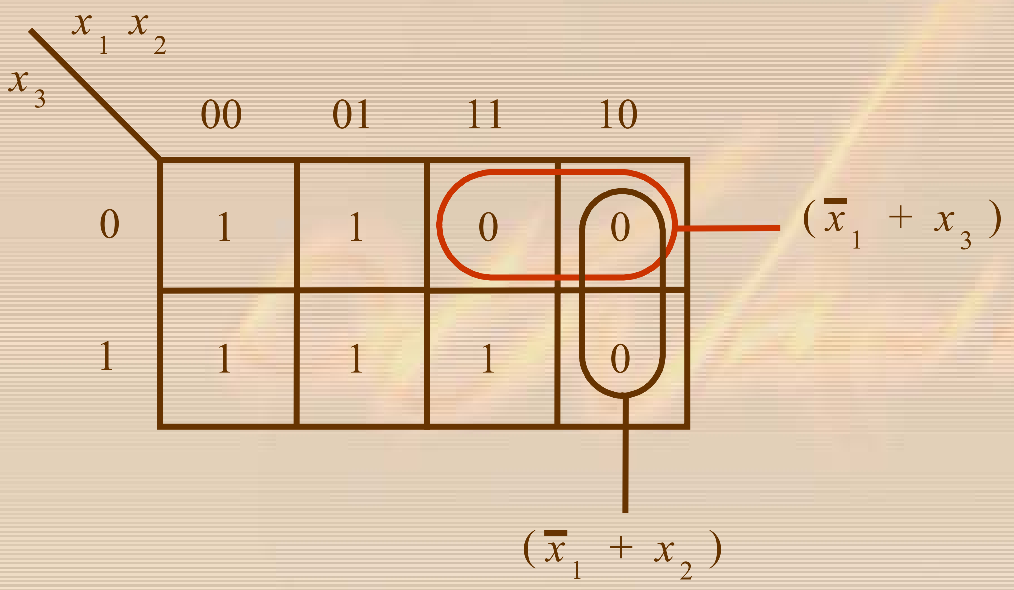
$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_4 + x_1\bar{x}_2x_3$$

Rysunek 4.12 Minimalizacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$

4. OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Implicent
to suma literałów, dla których wartość logiczna wynosi 0.

Implicent prosty
to implicent, który po odrzuceniu dowolnego literału przestaje być implicentem



Rysunek 4.13 Minimalizacja funkcji $f = \Pi M(4, 5, 6)$

$$\bar{f} = x_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3$$

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{x_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3}$$

$$= \overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{x_1\bar{x}_3}$$

$$= (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_3)$$

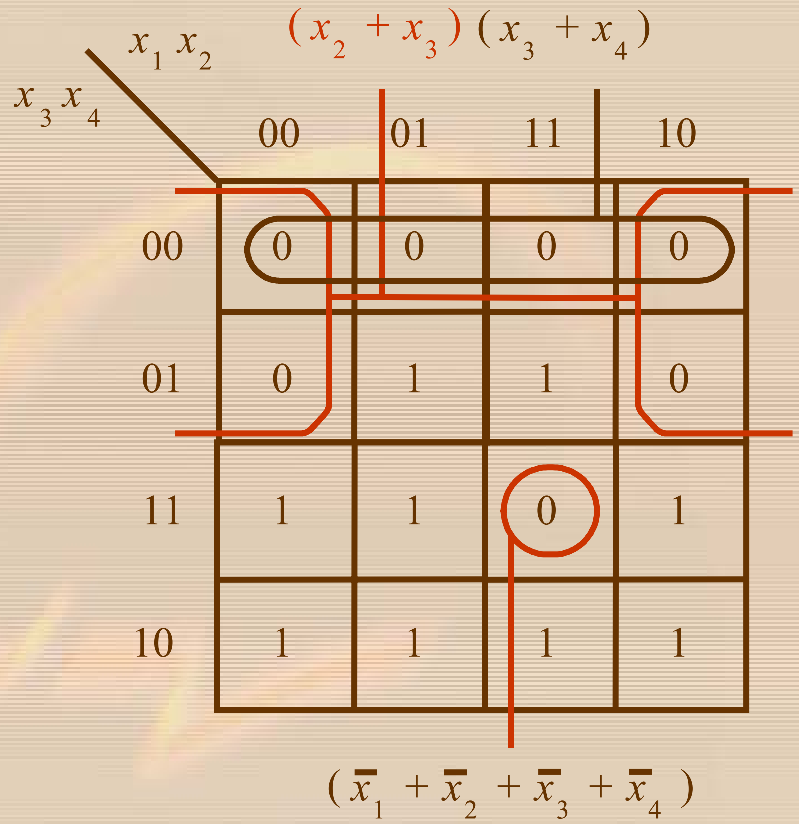
4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$$\bar{f} = \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$$

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4}$$

$$= \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \cdot \overline{\bar{x}_3\bar{x}_4} \cdot \overline{x_1x_2x_3x_4}$$

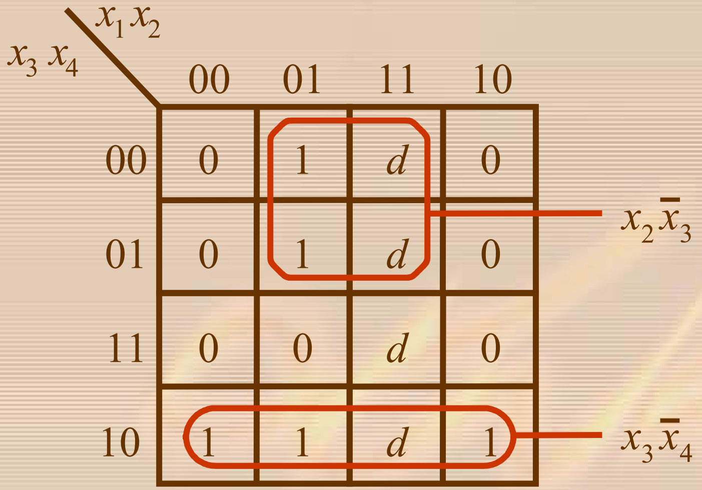
$$= (x_2 + x_3)\cdot(x_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$



Rysunek 4.14 Minimalizacja funkcji $f = \Pi\, M(0, 1, 4, 8, 9, 12, 15)$

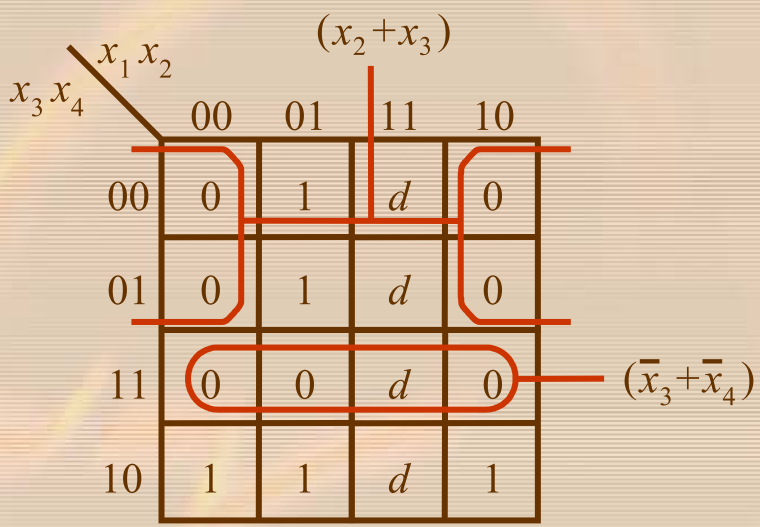
4.3 MINIMALIZACJA FUNKCJI NIEZUPEŁNYCH

Funkcja niezupełna
to funkcja, dla której istnieje przynajmniej jedna kombinacja zmiennych wejściowych taka, że wartość logiczna funkcji jest nieistotna i może wynosić 0 albo 1.



$$f = x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_4$$

(a) Suma iloczynów



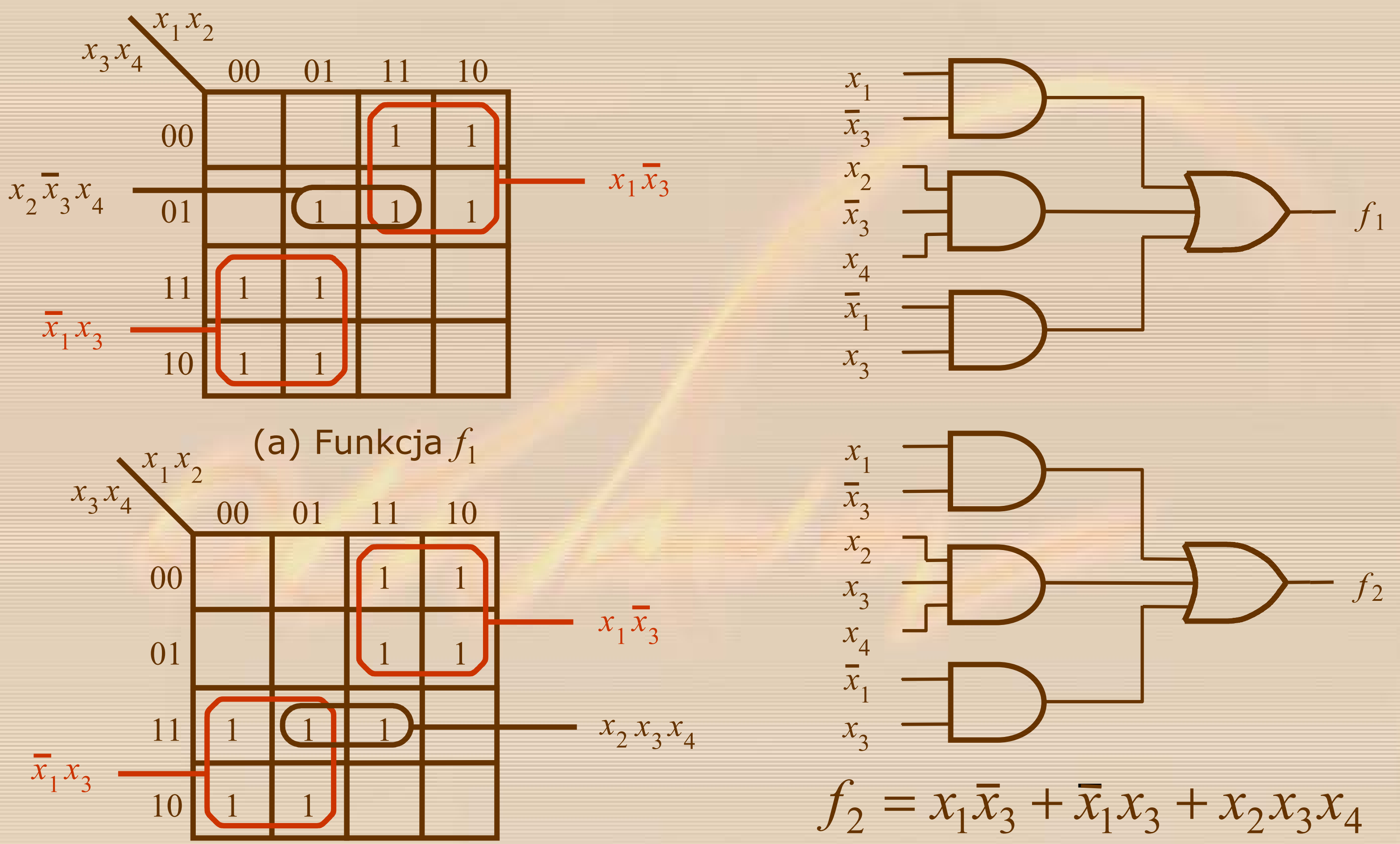
$$f = (x_2 + x_3)(\bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$

(b) Iloczyn sum

Rysunek 4.15 Dwie realizacje funkcji $f = \Sigma\, m(2, 4, 5, 6, 10) + D(12, 13, 14, 15)$

4.4 MINIMALIZACJA KILKU FUNKCJI

$$f_1 = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 + x_2\bar{x}_3 x_4$$



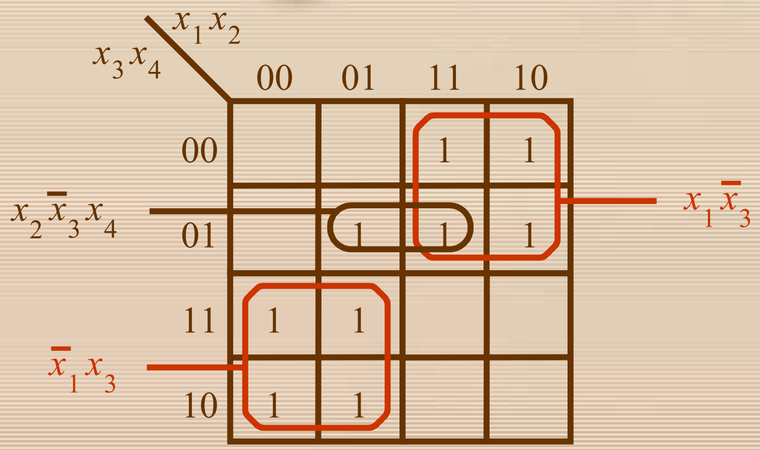
(a) Funkcja f_1

(b) Funkcja f_2

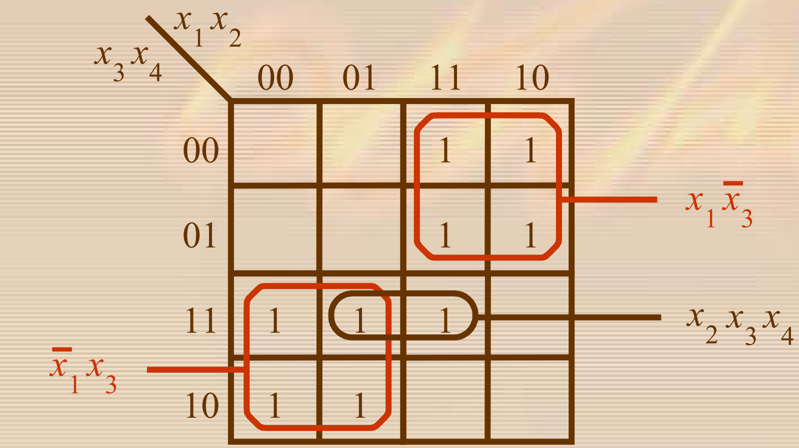
$$f_2 = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 + x_2 x_3 x_4$$

(c) Układy realizujące funkcje f_1 i f_2

Rysunek 4.16 Przykład syntezy układów realizujących dwie funkcje z użyciem mintermów

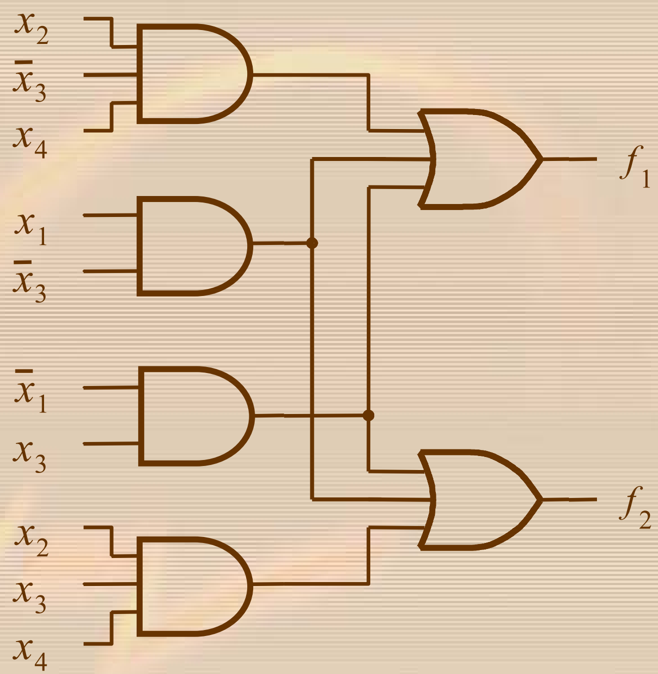


(a) Funkcja f_1



(b) Funkcja f_2

$$f_1 = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 + x_2\bar{x}_3x_4$$

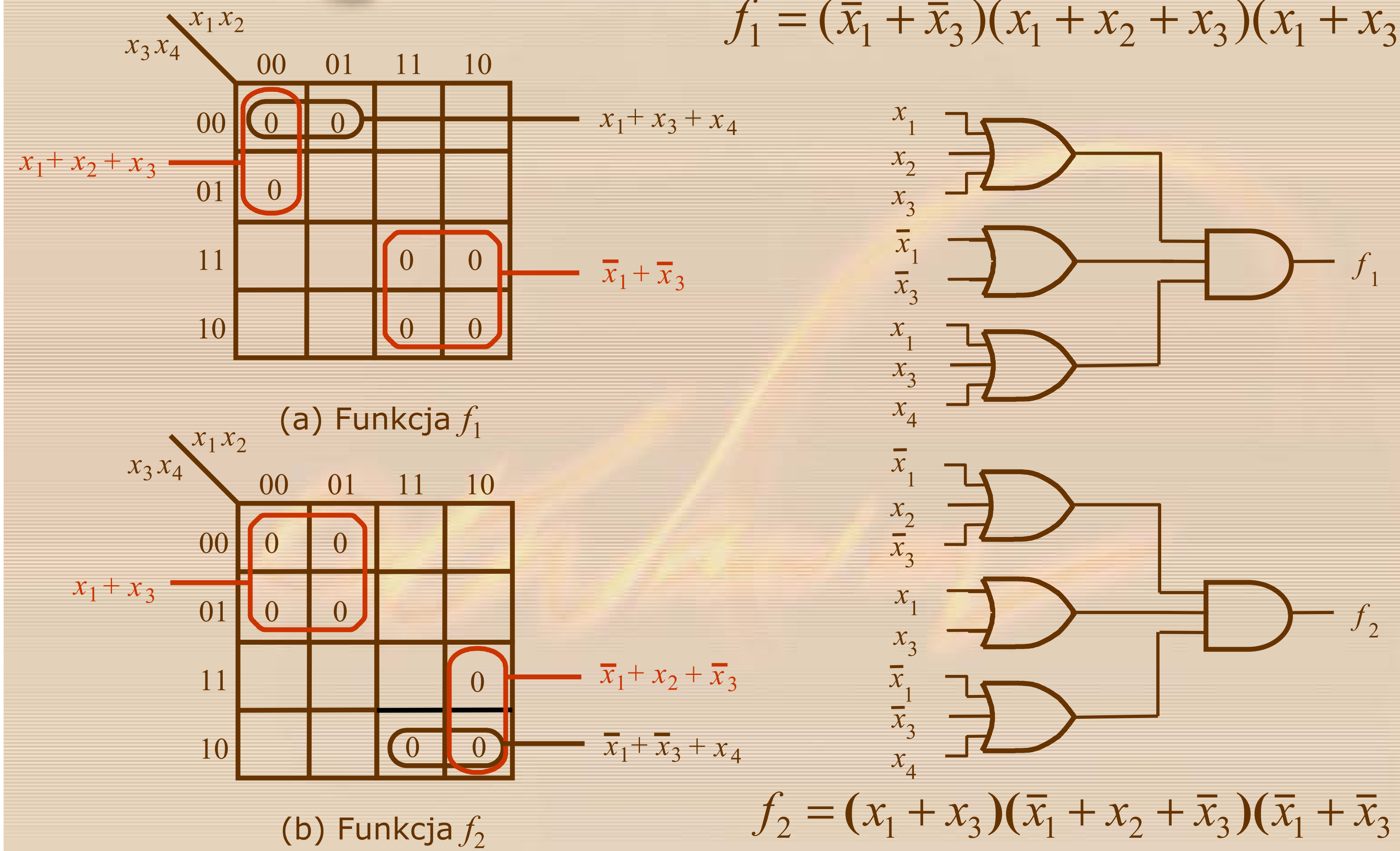


$$f_2 = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 + x_2x_3x_4$$

(c) Układ realizujący funkcje f_1 i f_2

Rysunek 4.17 Przykład syntezy układu realizującego dwie funkcje z użyciem mintermów

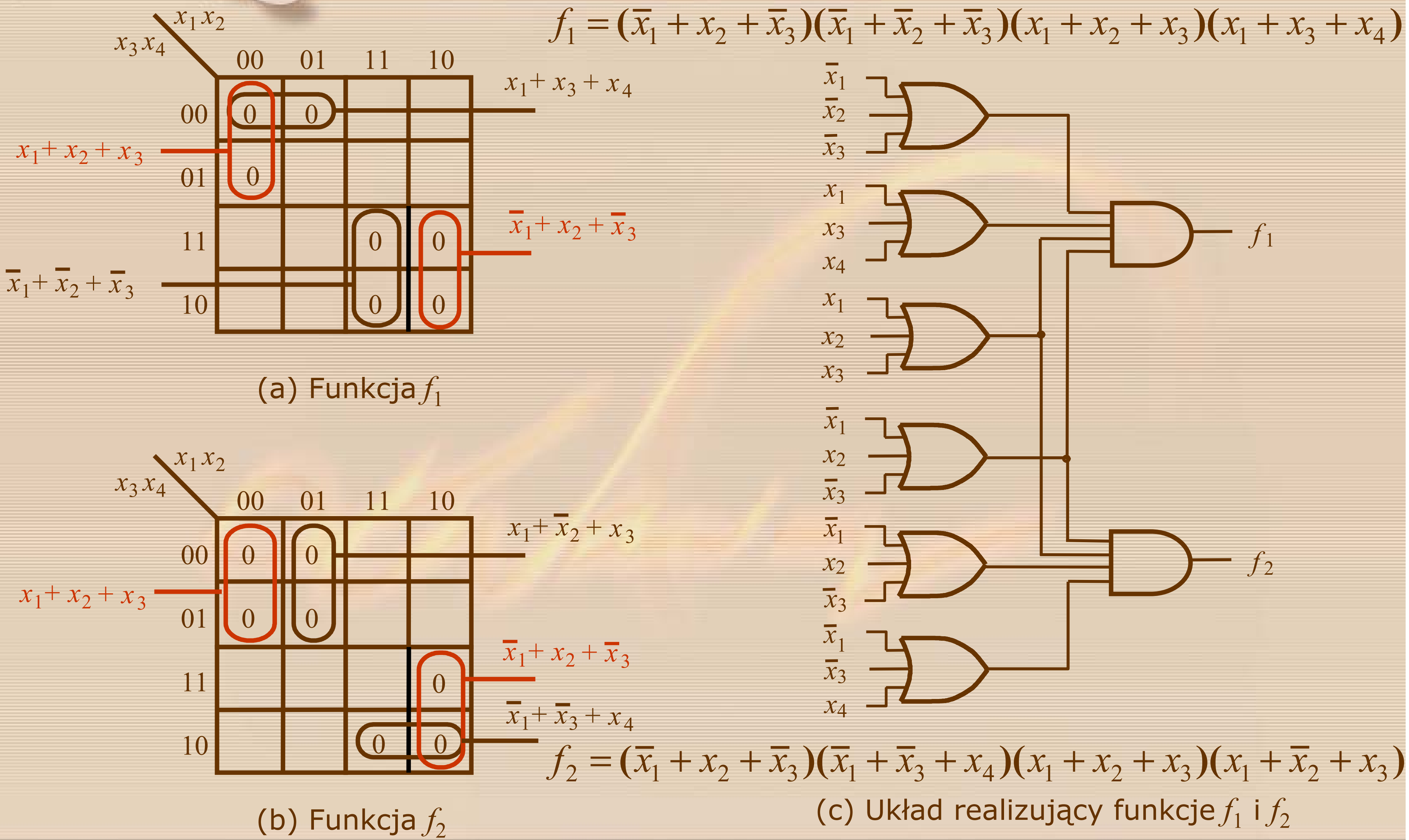
$$f_1 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_3 + x_4)$$



$$f_2 = (x_1 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + x_4)$$

(c) Układy realizujące funkcje f_1 i f_2

Rysunek 4.18 Przykład syntezy układów realizujących dwie funkcje z użyciem maxtermów



Rysunek 4.19 Przykład syntezy układu realizującego dwie funkcje z użyciem maxtermów

Przykład 4.1

Obliczyć koszt funkcji f_1 i f_2 zrealizowanych za pomocą optymalizacji implikantów i za pomocą optymalizacji implicentów.

Realizacja funkcji za pomocą optymalizacji implikantów

Gdy każdą funkcję realizuje oddzielny układ (rys. 4.16)

f_1	liczba bramek = 4	liczba wejść = 10	koszt = 14
f_2	liczba bramek = 4	liczba wejść = 10	koszt = 14
f_1 i f_2			łączny koszt = 28

Jeden układ realizuje łącznie dwie funkcje (rys. 4.17)

f_1 i f_2	liczba bramek = 6	liczba wejść = 16	łączny koszt = 22

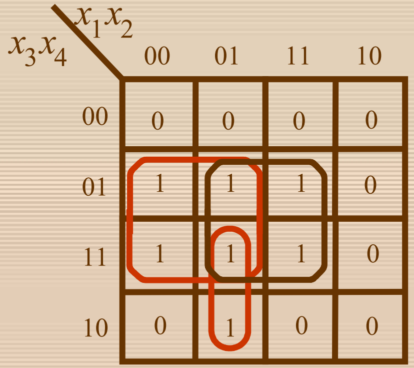
Realizacja funkcji za pomocą optymalizacji implicentów

Gdy każdą funkcję realizuje oddzielny układ (rys. 4.18)

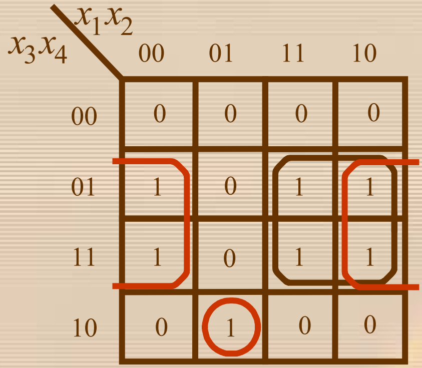
f_1	liczba bramek = 4	liczba wejść = 11	koszt = 15
f_2	liczba bramek = 4	liczba wejść = 11	koszt = 15
f_1 i f_2			łączny koszt = 30

Jeden układ realizuje łącznie dwie funkcje (rys. 4.19)

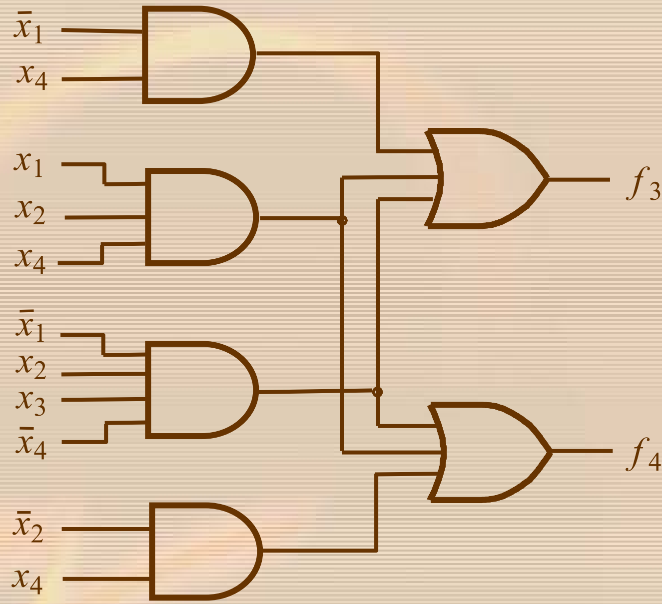
f_1 i f_2	liczba bramek = 8	liczba wejść = 26	łączny koszt = 34



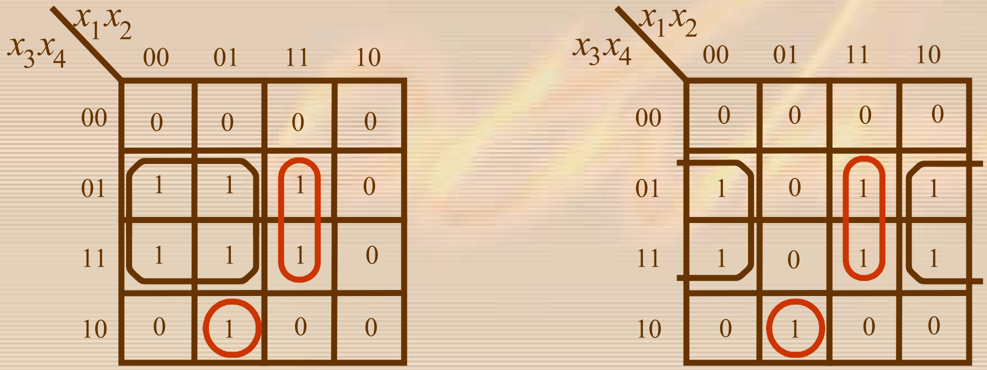
(a) Optymalna realizacja funkcji f_3



(b) Optymalna realizacja funkcji f_4

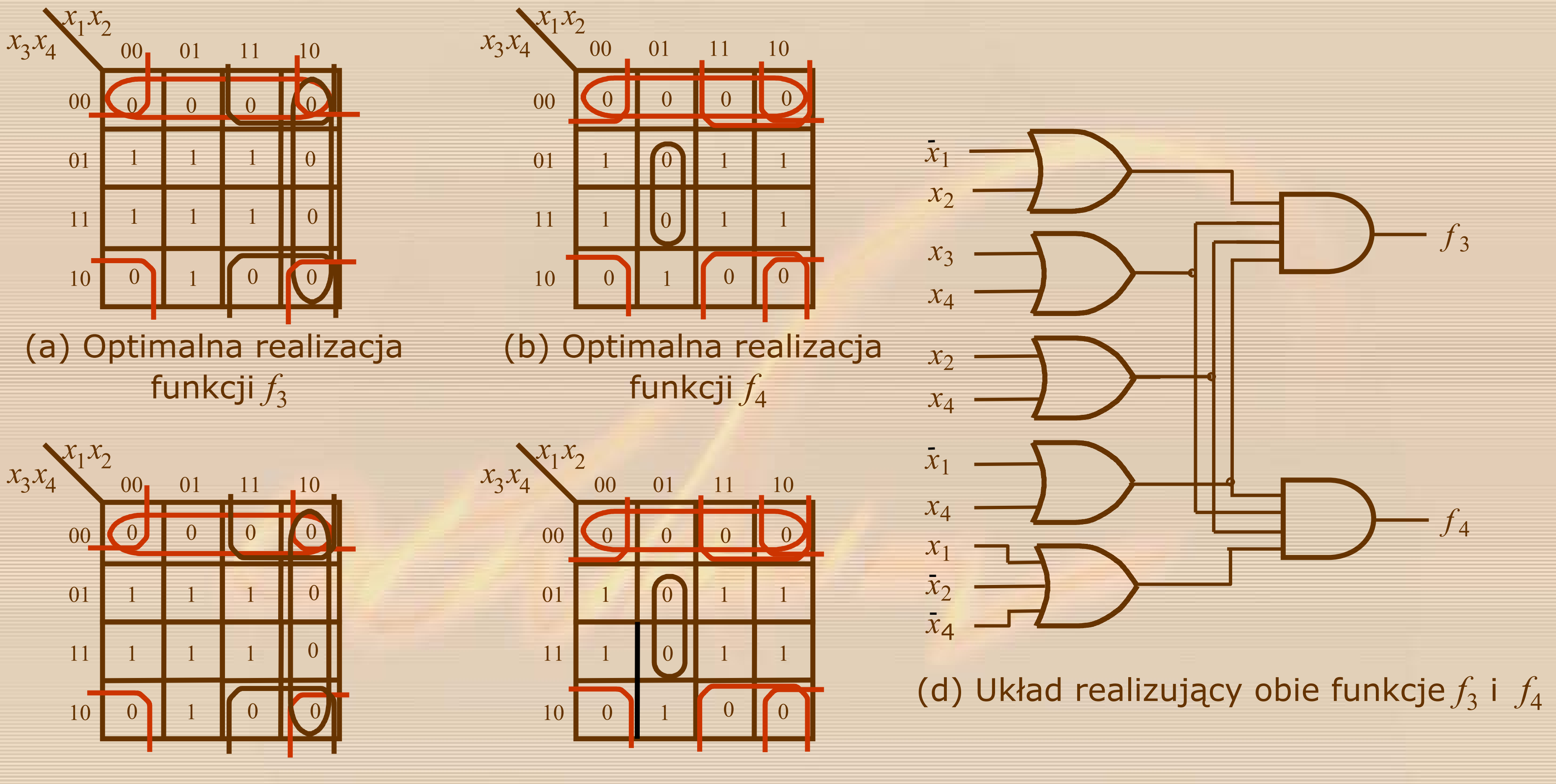


(d) Układ realizujący obie funkcje f_3 i f_4



(c) Optymalna realizacja obu funkcji f_3 i f_4

Rysunek 4.20 Przykład syntezy układu realizującego dwie funkcje z użyciem mintermów



(a) Optymalna realizacja funkcji f_3

(b) Optymalna realizacja funkcji f_4

(c) Optymalna realizacja obu funkcji f_3 i f_4

(d) Układ realizujący obie funkcje f_3 i f_4

Rysunek 4.21 Przykład syntezy układu realizującego dwie funkcje z użyciem maxtermów

4. OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Obliczyć koszt funkcji f_1 i f_2 zrealizowanych za pomocą optymalizacji implikantów i za pomocą optymalizacji implicentów.

Przykład 4.2

Realizacja funkcji za pomocą optymalizacji implikantów
Gdy każdą funkcję realizuje oddzielny układ

f_3	liczba bramek = 4	liczba wejść = 10	koszt = 14
f_4	liczba bramek = 4	liczba wejść = 11	koszt = 15
f_3 i f_4			łączny koszt = 29

Jeden układ realizuje łącznie dwie funkcje (rys. 4.20 d)

f_3 i f_4	liczba bramek = 6	liczba wejść = 17	łączny koszt = 23

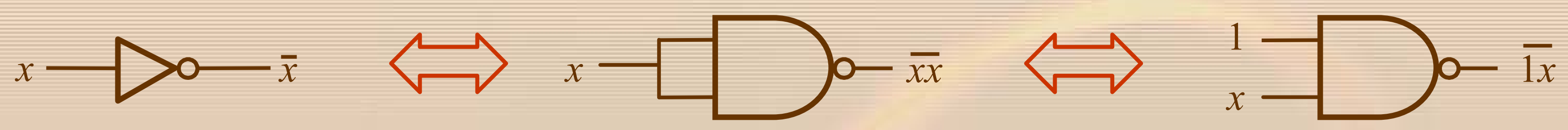
Realizacja funkcji za pomocą optymalizacji implicentów
Gdy każdą funkcję realizuje oddzielny układ

f_3	liczba bramek = 5	liczba wejść = 12	koszt = 17
f_4	liczba bramek = 5	liczba wejść = 13	koszt = 18
f_3 i f_4			łączny koszt = 35

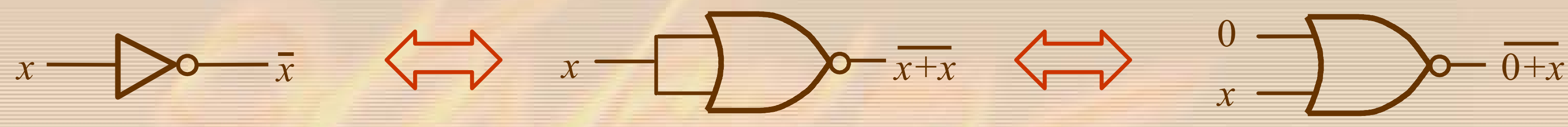
Jeden układ realizuje łącznie dwie funkcje (rys. 4.21 d)

f_3 i f_4	liczba bramek = 7	liczba wejść = 19	łączny koszt = 26

4.5 SIECI LOGICZNE NAND I NOR

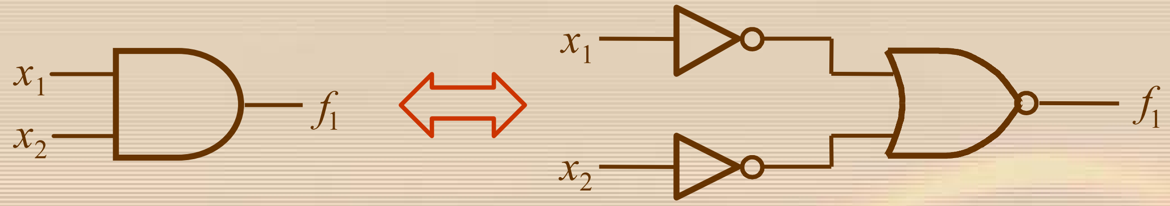


$$\text{(a)} \quad \bar{x} = \overline{x\,x} = \overline{1\,x}$$

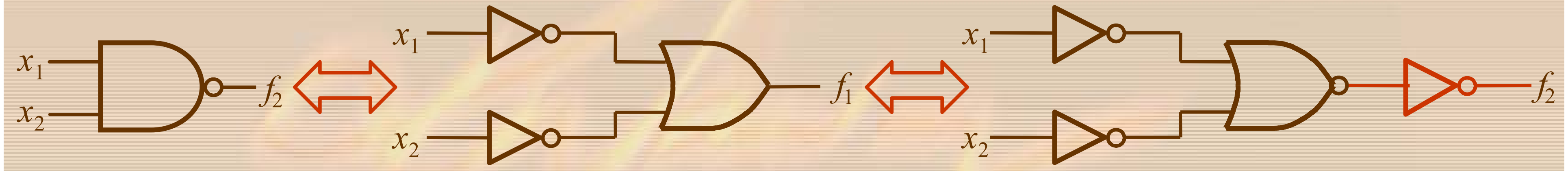


$$\text{(b)} \quad \bar{x} = \overline{x + x} = \overline{0 + x}$$

Rysunek 4.22 Zastosowanie praw $x = xx$, $x = 1x$, $x = x + x$, $x = 0 + x$ do realizacji bramki NOT za pomocą bramek NAND bądź NOR



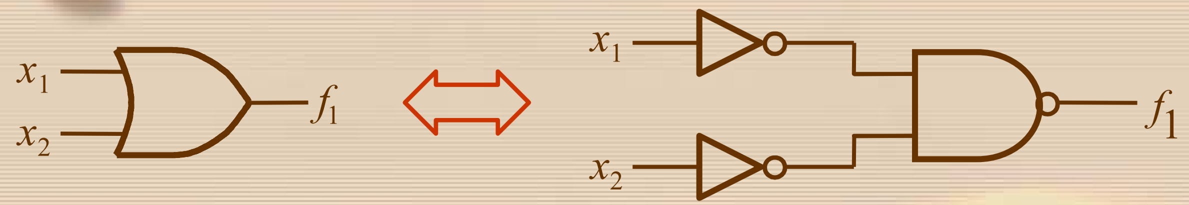
(a) $f_1 = x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}$



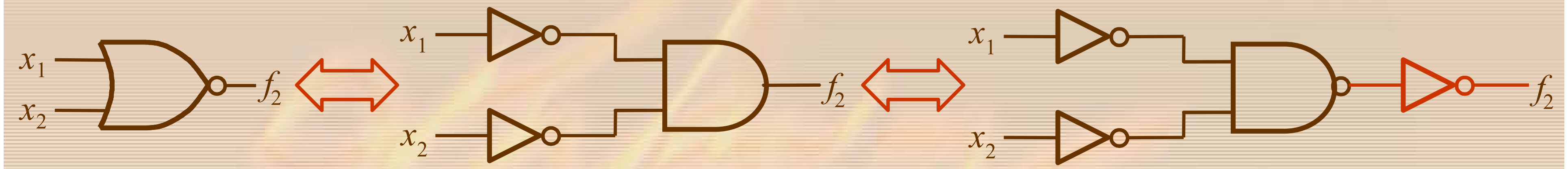
(b) $f_2 = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}}$

Rysunek 4.23 Zastosowanie prawa DeMorgana do realizacji bramek AND i NAND za pomocą bramek NOR

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

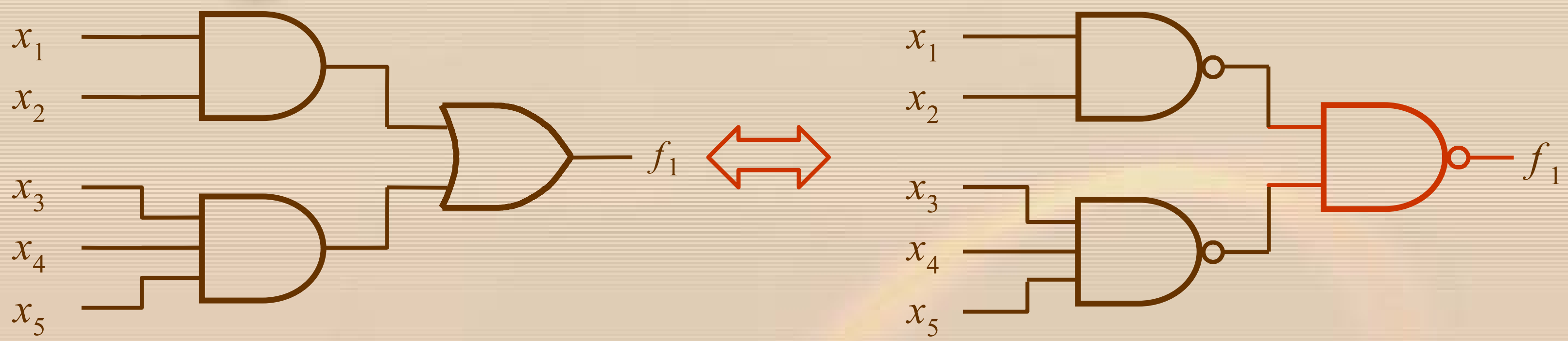


(a) $f_1 = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$

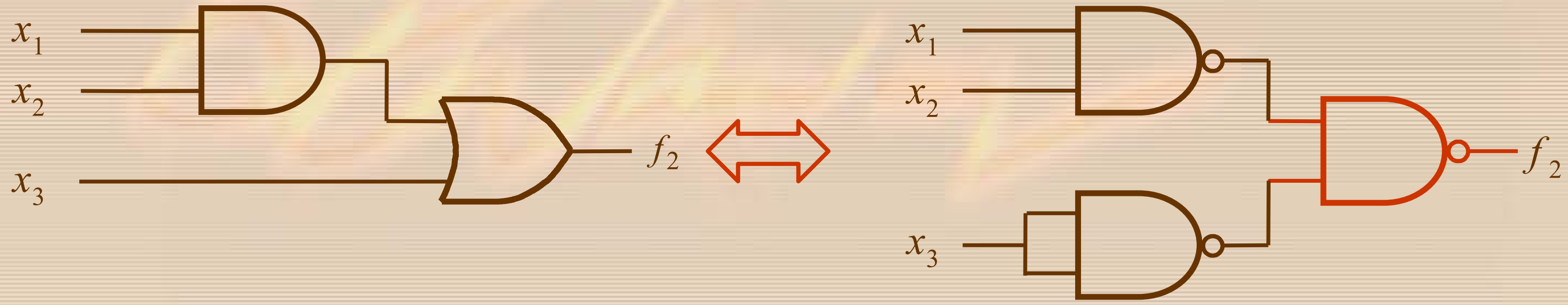


(b) $f_2 = \overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}$

Rysunek 4.24 Zastosowanie prawa DeMorgana do realizacji bramek OR i NOR za pomocą bramek NAND

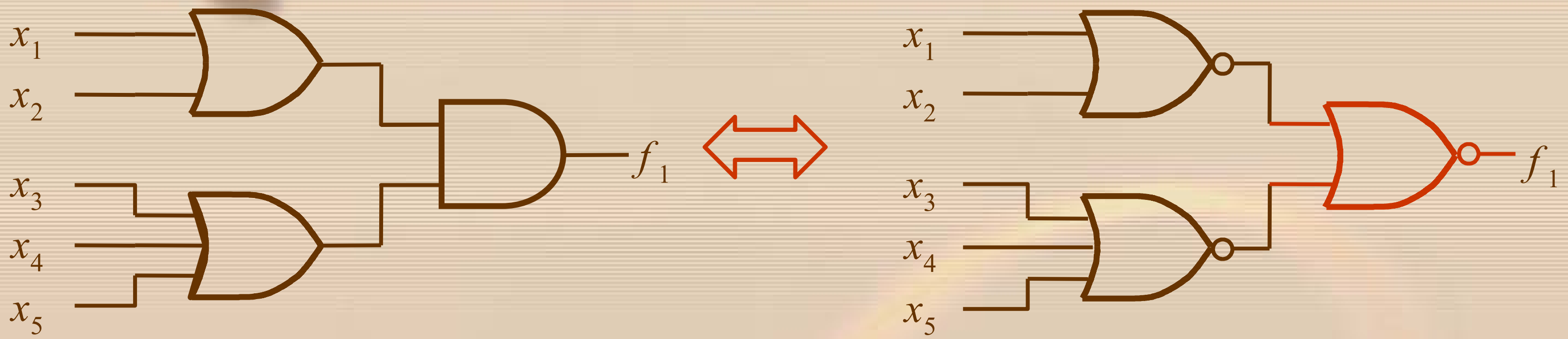


$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4x_5 = \overline{\overline{x_1x_2 + x_3x_4x_5}} = \overline{\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_3x_4x_5}}$$

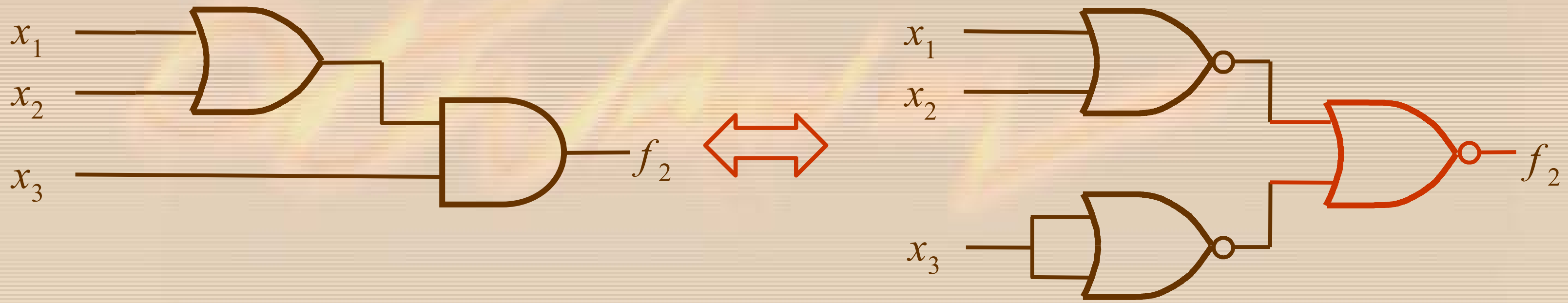


$$f_2 = x_1x_2 + x_3 = \overline{\overline{x_1x_2 + x_3}} = \overline{\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_3}}$$

Rysunek 4.25 Przykłady realizacji sumy iloczynów za pomocą bramek NAND



$$f_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + x_5) = \overline{\overline{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + x_5)}} = \overline{\overline{x_1 + x_2} + \overline{x_3 + x_4 + x_5}}$$

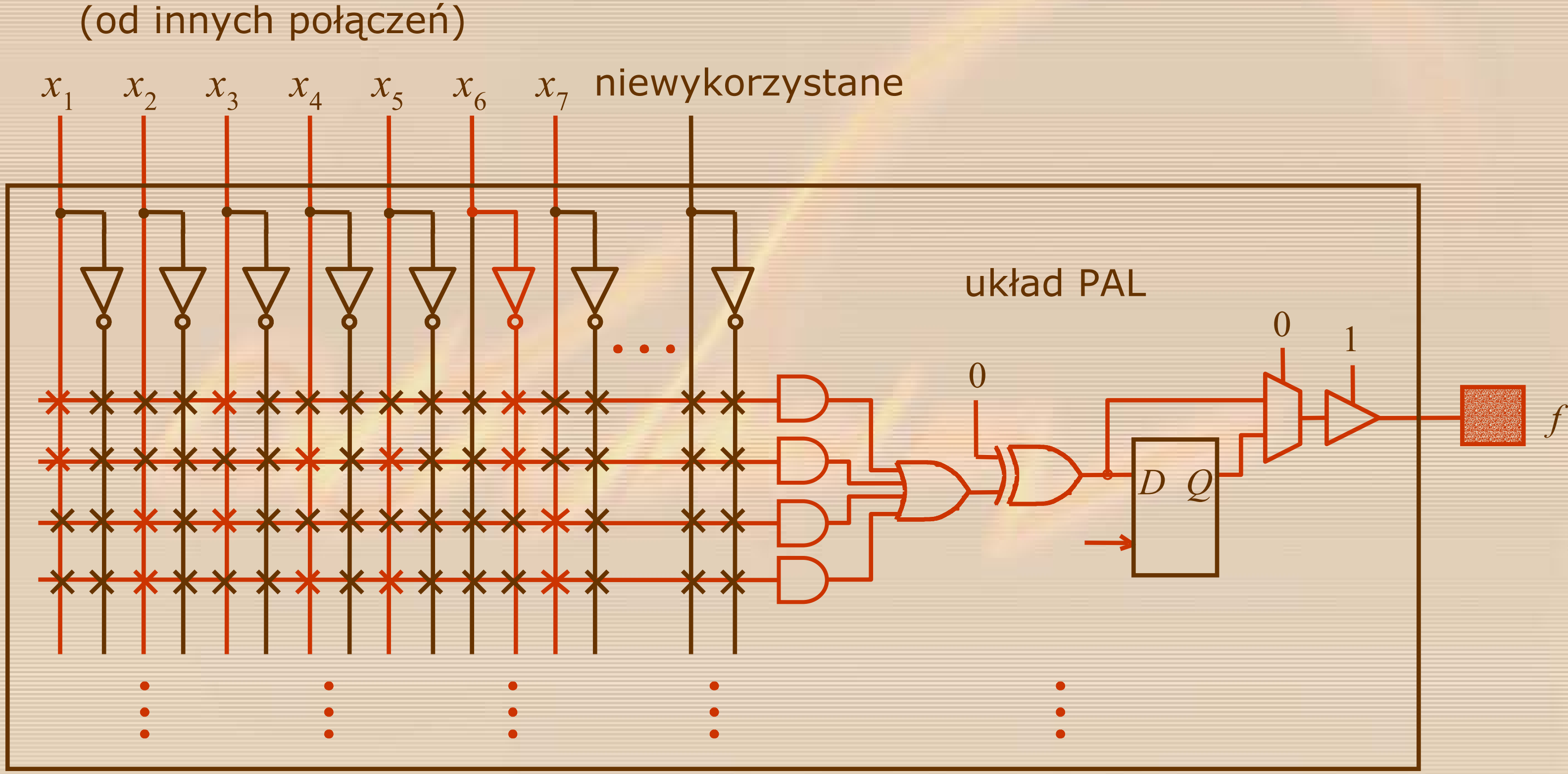


$$f_2 = (x_1 + x_2)x_3 = \overline{\overline{(x_1 + x_2)x_3}} = \overline{\overline{x_1 + x_2} + \overline{x_3}}$$

Rysunek 4.26 Przykłady realizacji iloczynu sum za pomocą bramek NOR

4.6 SYNTEZA WIELOPOZIOMOWA

$$f(x_1,\ldots,x_7) = x_1x_3\bar{x}_6 + x_1x_4x_5\bar{x}_6 + x_2x_3x_7 + x_2x_4x_5x_7$$



Rysunek 4.27 Realizacja funkcji za pomocą układu CPLD

Faktoryzacja

Funkcja sfaktoryzowana
jest definiowana rekurencyjnie w sposób następujący:
- literał funkcji jest formą sfaktoryzowaną,
- suma form sfaktoryzowanych jest formą sfaktoryzowaną,
- iloczyn form sfaktoryzowanych jest formą sfaktoryzowaną.

Przykłady form sfaktoryzowanych

$$x_1 x_2 \overline{x}_3$$

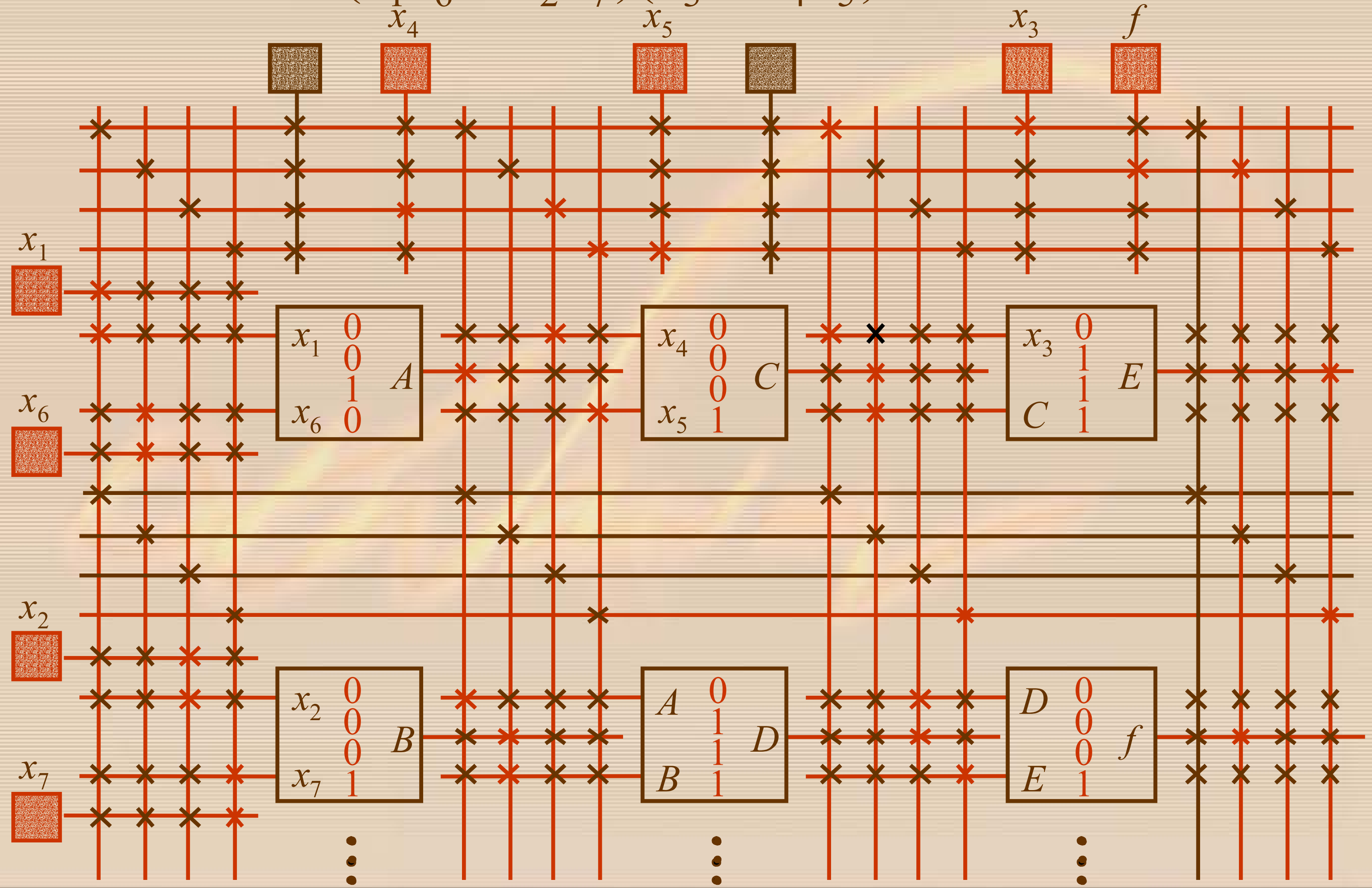
$$x_1 + \overline{x}_2 x_3$$

$$((\overline{x}_1 + x_4) x_5 x_7 + x_3)(x_6 + \overline{x}_2) + \overline{x}_7$$

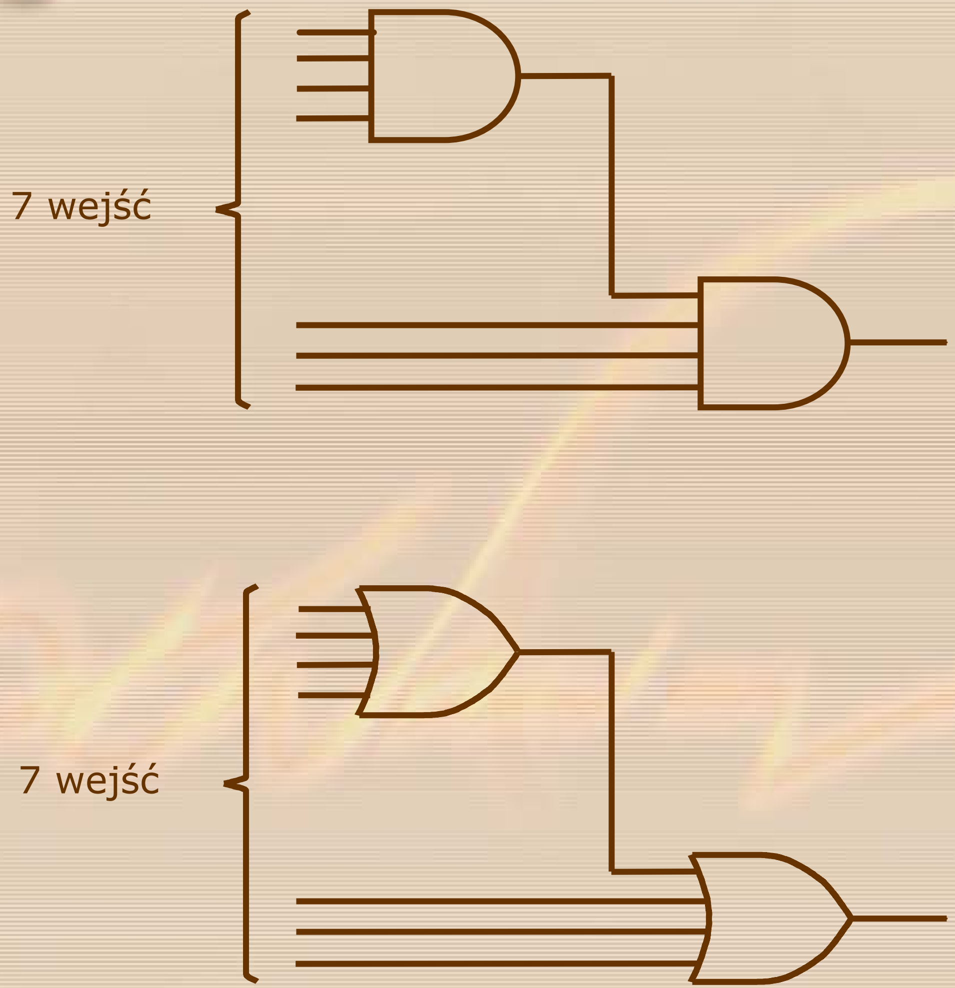
Formą sfaktoryzowaną nie jest

$$(\overline{x_1 + x_2}) x_3$$

$$f = x_1\bar{x}_6(x_3 + x_4x_5) + x_2x_7(x_3 + x_4x_5)$$
$$= (x_1\bar{x}_6 + x_2x_7)(x_3 + x_4x_5)$$



Rysunek 4.28 Realizacja za pomocą układu FPGA



Rysunek 4.29 Realizacja siedmiowejściowych bramek AND i OR za pomocą dwóch bramek czterowejściowych

$$f = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5x_6 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$$

$$f = x_1\bar{x}_4x_6(\bar{x}_2x_3x_5 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_5)$$

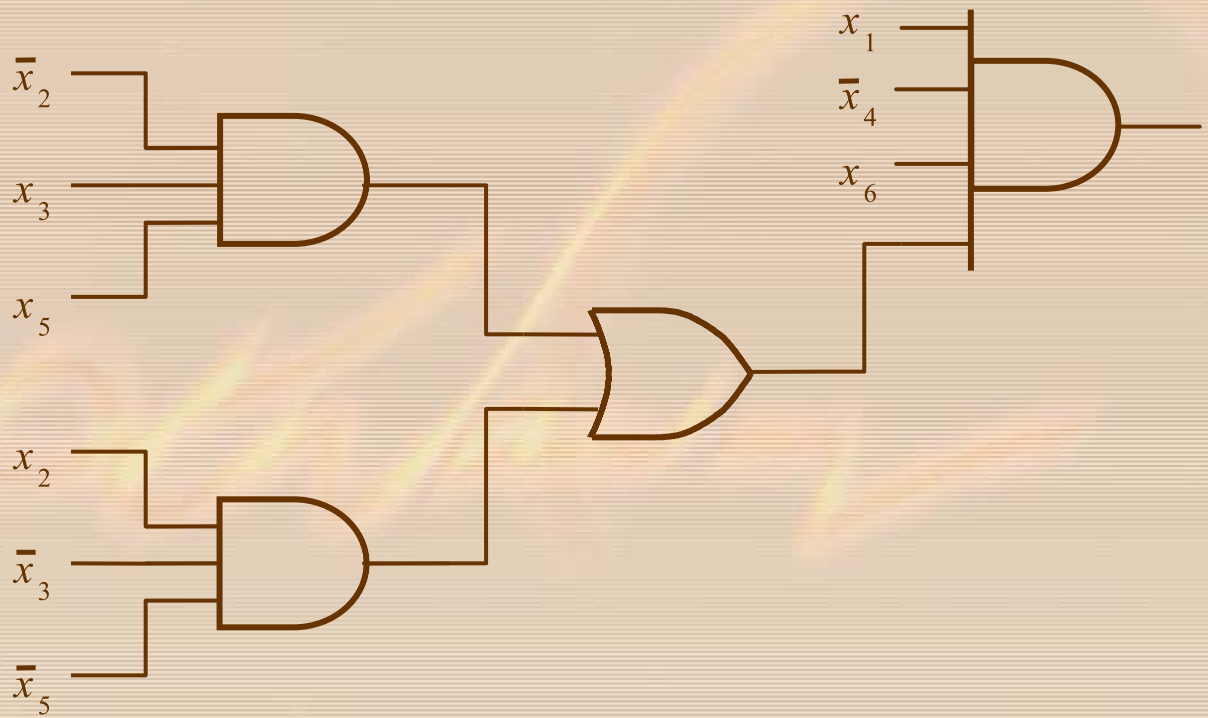
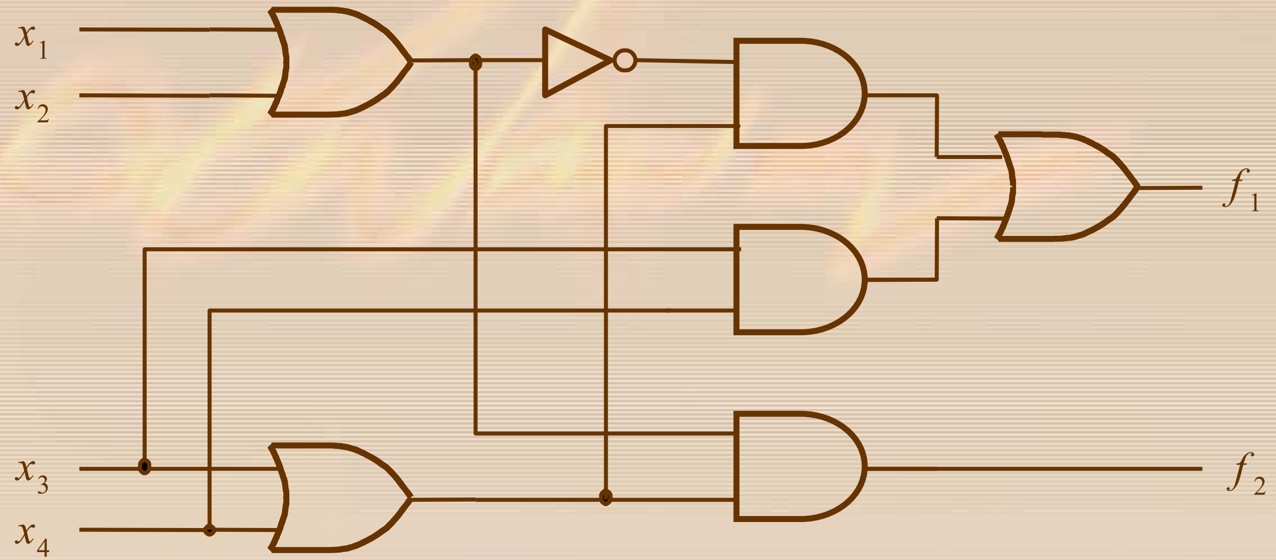


Figure 4.30 Układ po sfaktoryzowaniu funkcji

$$\begin{cases} f_1 = (x_1 + x_2)x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2(x_3 + x_4) \\ f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3\bar{x}_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2(x_3 + x_4) \\ f_2 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \end{cases}$$

$$f_1 = x_3x_4 + (\overline{x_1 + x_2})(x_3 + x_4)$$



Rysunek 4.31 Układ po sfaktoryzowaniu funkcji

Dekompozycja funkcjonalna

Dekompozycja
to przekształcenie pojedynczego wyrażenia w kilka niezależnych wyrażeń.

Przykład dekompozycji

$$f = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

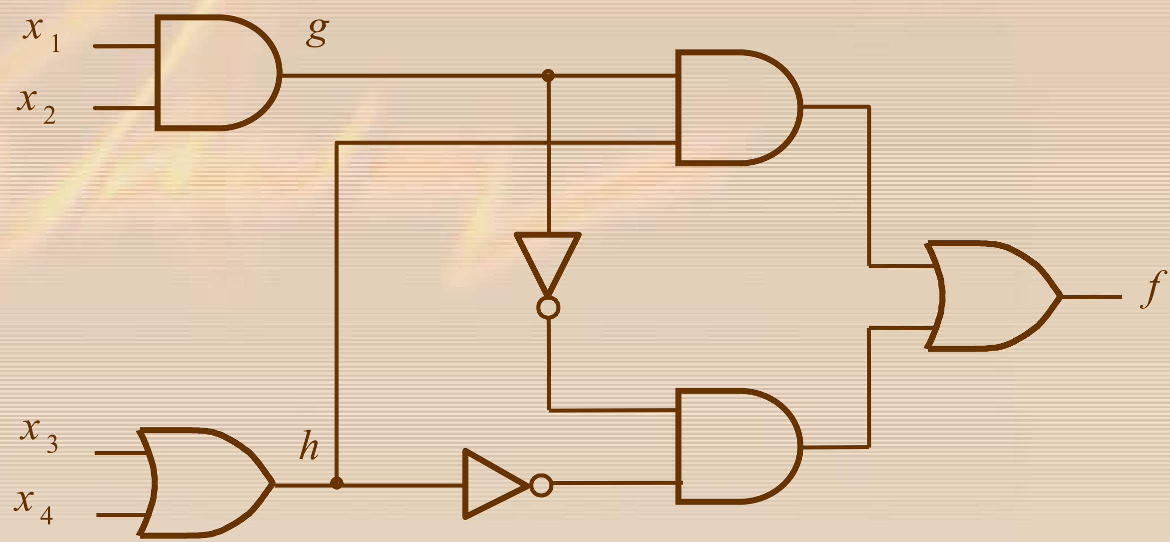
uwzględniając wyrażenia

$$g = x_1x_2$$

$$h = x_3 + x_4$$

otrzymuje się

$$f = gh + \bar{g}\bar{h}$$



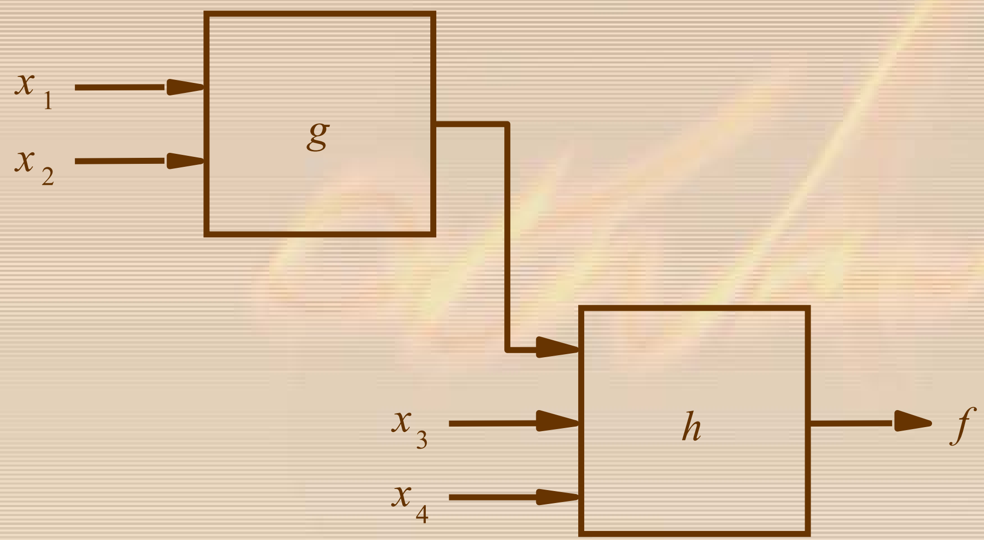
Rysunek 4.32 Układ po dekompozycji funkcji

$$f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$$

$$f = (\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2) x_3 + (\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2) x_4$$

przyjmijmy

$$g(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$



Rysunek 4.33 Schemat blokowy funkcji po dekompozycji

stąd

$$\bar{g} = \overline{\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2}$$

$$= \overline{\bar{x}_1 x_2} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_2}$$

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_2)$$

$$= x_1 \bar{x}_1 + x_1 x_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 x_2$$

$$= 0 + x_1 x_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 + 0$$

$$= x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

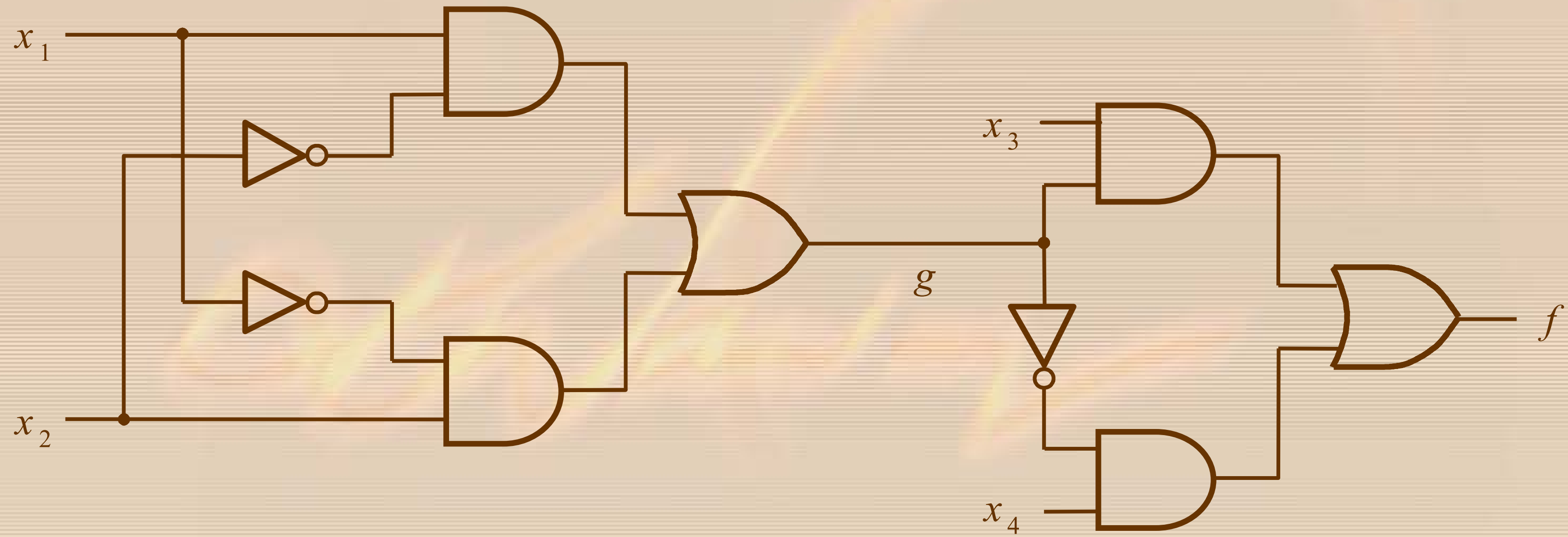
uwzględniając tę zależność

$$f = g x_3 + \bar{g} x_4$$

$$= h[g(x_1, x_2), x_3, x_4]$$

$$f = gx_3 + \bar{g}x_4$$

$$g(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$



Rysunek 4.34 Układ po dekompozycji funkcji

$x_5 = 0$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1			
01		1	1	1
11	1			
10		1	1	1

$x_5 = 1$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10	1	1	1	1

Rysunek 4.35 Funkcja dana tablicą Karnaugha

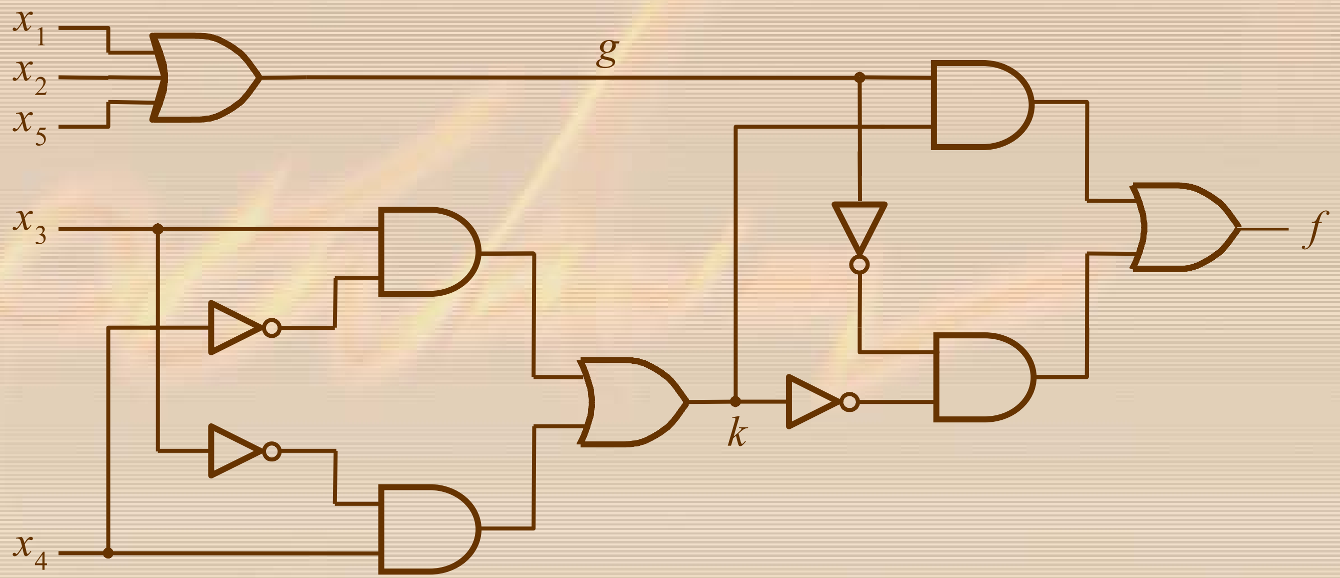
$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= \bar{x}_3x_4x_5 + x_3\bar{x}_4x_5 + \bar{x}_3x_4x_1 + x_3\bar{x}_4x_1 + \bar{x}_3x_4x_2 + x_3\bar{x}_4x_2 + \\
&+ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 \\
&= \bar{x}_3x_4(x_1+x_2+x_5) + x_3\bar{x}_4(x_1+x_2+x_5) \\
&+ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5(x_3x_4+\bar{x}_3\bar{x}_4) \\
&= (\bar{x}_3x_4+x_3\bar{x}_4)(x_1+x_2+x_5) + (x_3x_4+\bar{x}_3\bar{x}_4)\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5 \\
&= (\bar{x}_3x_4+x_3\bar{x}_4)(x_1+x_2+x_5) + (x_3x_4+\bar{x}_3\bar{x}_4)(\overline{x_1+x_2+x_5})
\end{aligned}
$$

$$g = (x_1 + x_2 + x_5)$$

$$k = \bar{x}_3 x_4 + x_3 \bar{x}_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = kg + \bar{k}\bar{g}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = h[g(x_1, x_2, x_5) + k(x_3, x_4)]$$



Rysunek 4.36 Układ po dekompozycji

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

suma iloczynów postać zminimalizowana

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_3 x_4 x_1 + x_3 \bar{x}_4 x_1 + \bar{x}_3 x_4 x_2 + x_3 \bar{x}_4 x_2 +$$
$$+ \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5$$

Realizacja funkcji po dekompozycji
liczba bramek = 11 liczba wejść = 19 koszt = 30
maksymalna liczba wejść = 3

Realizacja funkcji w postaci sumy iloczynów
liczba bramek = 14 liczba wejść = 41 koszt = 55
maksymalna liczba wejść = 5

Przykład 4.3

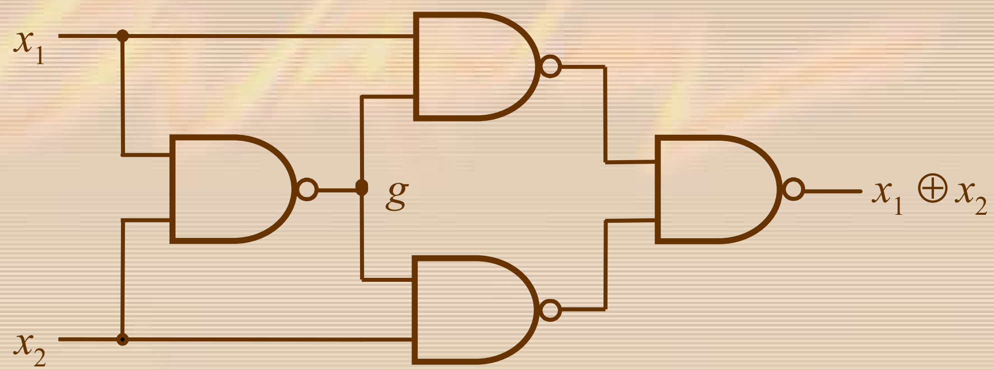
$$f(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2=x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2=\overline{\overline{x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2}}=\overline{\overline{x_1\bar{x}_2}\cdot\overline{\bar{x}_1x_2}}$$

$$=\overline{\overline{x_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\cdot\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)x_2}}=\overline{\overline{x_1\cdot\overline{x_1x_2}}\cdot\overline{\overline{x_1x_2}\cdot x_2}}$$

$$=\overline{\overline{x_1g}\cdot\overline{x_2g}}$$

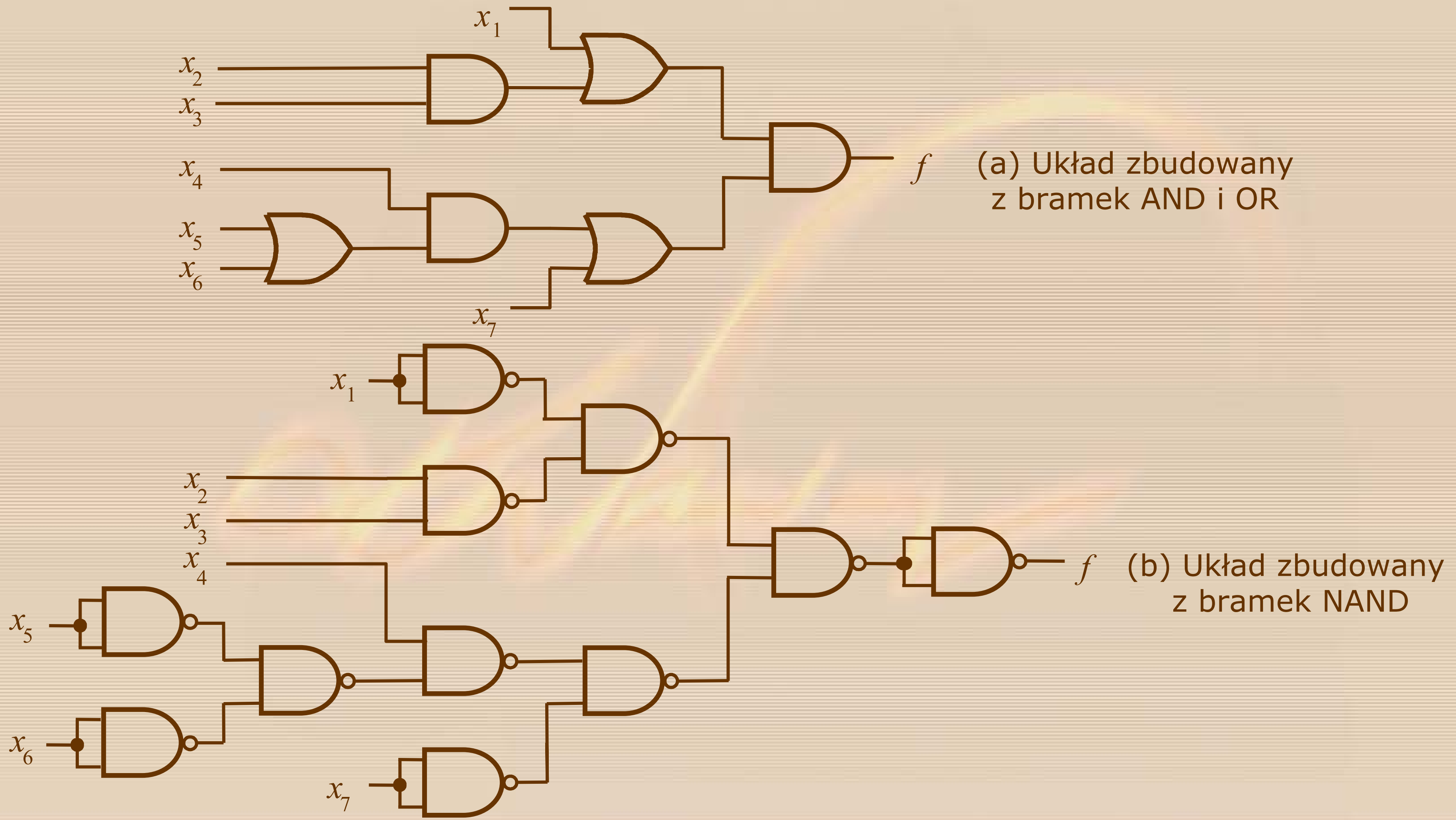
stąd

$$g(x_1,x_2)=\overline{x_1x_2}$$



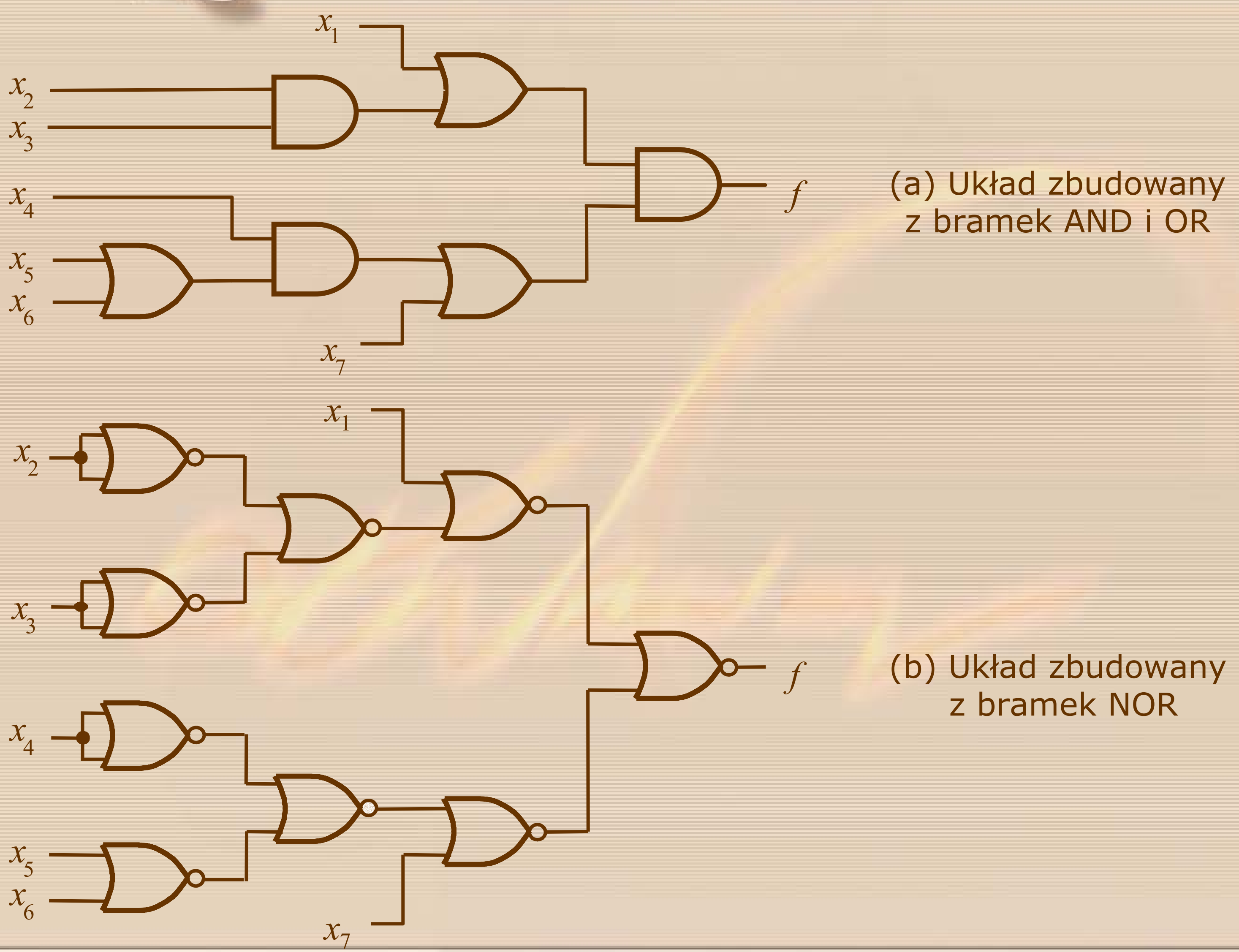
Rysunek 4.37 Realizacja bramki XOR za pomocą bramek NAND

Wielopoziomowe sieci NAND i NOR



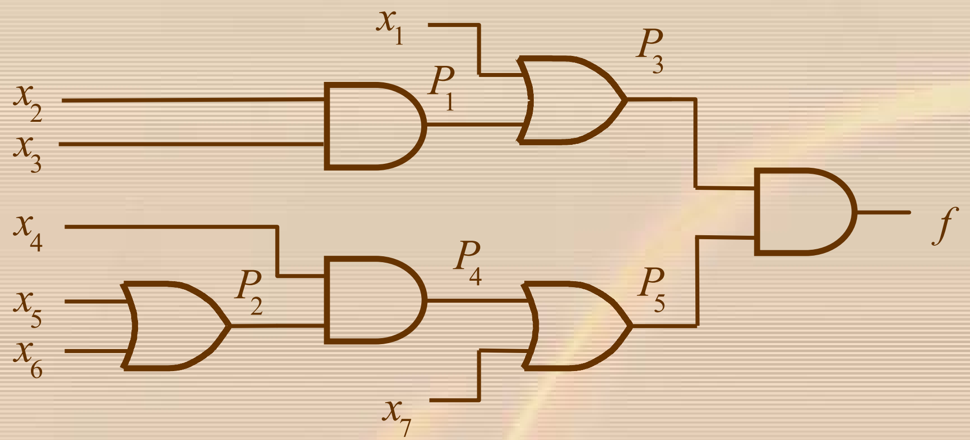
Rysunek 4.38 Przekształcenie sieci AND-OR w sieć NAND

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH



Rysunek 4.39 Przekształcenie sieci AND-OR w sieć NOR

4.7 ANALIZA UKŁADÓW WIELOPOZIOMOWYCH



Rysunek 4.40
Przykład analizy

$$P_1 = x_2 x_3$$

$$P_2 = x_5 + x_6$$

$$P_3 = x_1 + P_1 = x_1 + x_2 x_3$$

$$P_4 = x_4 P_2 = x_4(x_5 + x_6)$$

$$P_5 = P_4 + x_7 = x_4(x_5 + x_6) + x_7$$

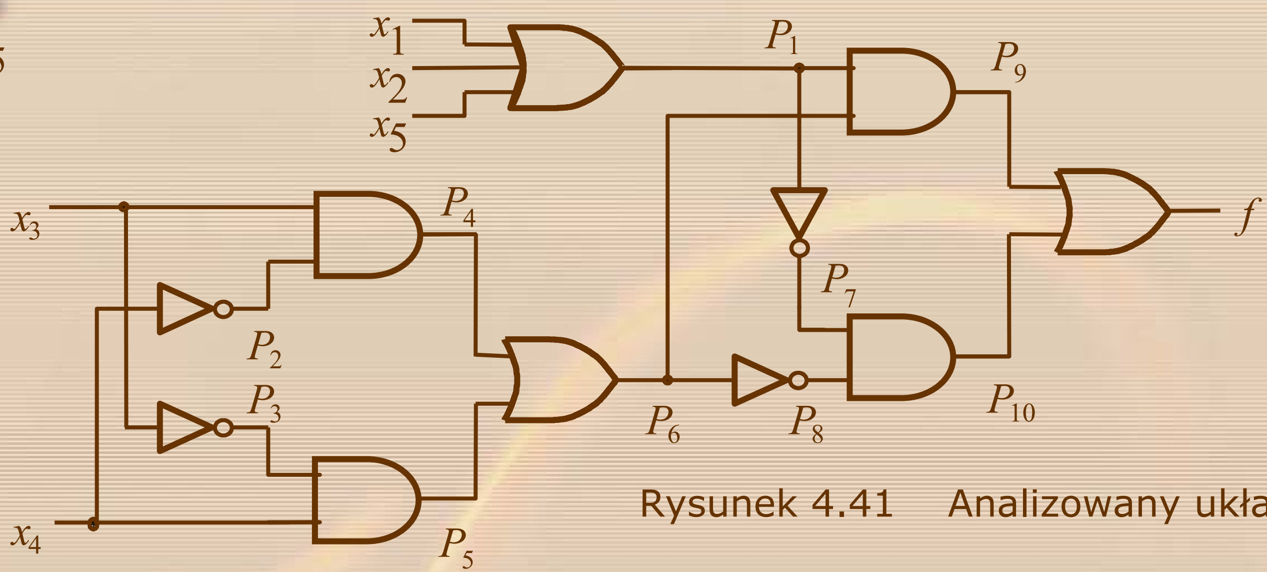
stąd

$$f = P_3 P_5 = (x_1 + x_2 x_3)(x_4(x_5 + x_6) + x_7)$$

ostatecznie

$$f = x_1 x_4 x_5 + x_1 x_4 x_6 + x_1 x_7 +$$
$$+ x_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_6 + x_2 x_3 x_7$$

4. OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

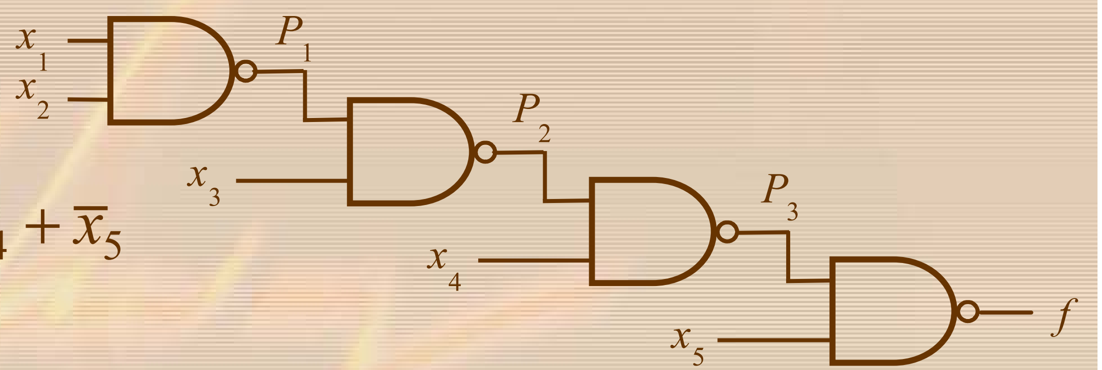


Rysunek 4.41 Analizowany układ

$$P_1 = x_1 + x_2 + x_5$$
$$P_2 = \bar{x}_4$$
$$P_3 = \bar{x}_3$$
$$P_4 = x_3 P_2$$
$$P_5 = x_4 P_3$$
$$P_6 = P_4 + P_5$$
$$P_7 = \bar{P}_1$$
$$P_8 = \bar{P}_6$$
$$P_9 = P_1 P_6$$
$$P_{10} = P_7 P_8$$
$$f = P_9 + P_{10}$$
$$= P_1 P_6 + P_7 P_8$$

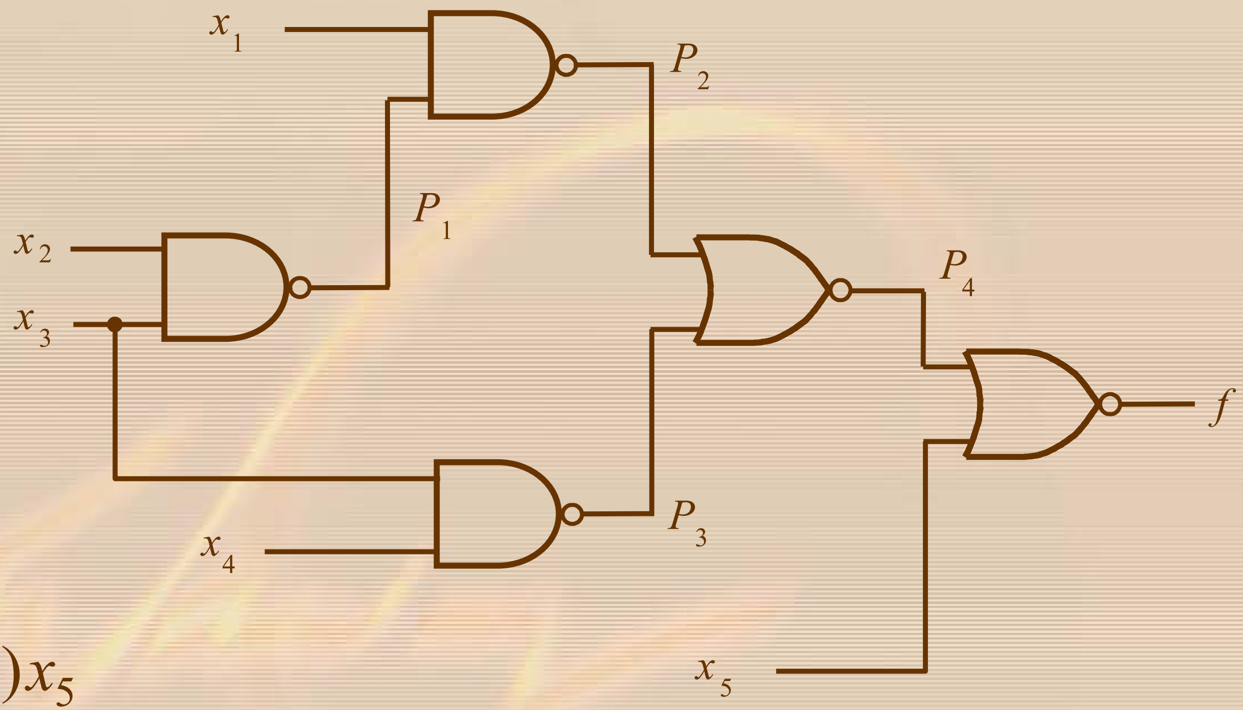
$$= (x_1 + x_2 + x_5)(P_4 + P_5) + \bar{P}_1 \bar{P}_6$$
$$= (x_1 + x_2 + x_5)(x_3 P_2 + x_4 P_3) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{P}_4 \bar{P}_5$$
$$= (x_1 + x_2 + x_5)(x_3 \bar{x}_4 + x_4 \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_3 + \bar{P}_2)(\bar{x}_4 + \bar{P}_3)$$
$$= (x_1 + x_2 + x_5)(x_3 \bar{x}_4 + x_4 \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_4 + x_3)$$
$$= x_1 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_5 x_3 \bar{x}_4 + x_5 \bar{x}_3 x_4 +$$
$$+ \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 x_4 x_3$$

$$P_1 = \overline{x_1 x_2}$$
$$P_2 = \overline{P_1 x_3}$$
$$P_3 = \overline{P_2 x_4}$$
$$\begin{aligned} f &= \overline{P_3 x_5} = \overline{P_3} + \overline{x}_5 \\ &= \overline{\overline{P_2 x_4}} + \overline{x}_5 = P_2 x_4 + \overline{x}_5 \\ &= \overline{P_1 x_3} x_4 + \overline{x}_5 = (\overline{P_1} + \overline{x}_3) x_4 + \overline{x}_5 \\ &= (\overline{\overline{x_1 x_2}} + \overline{x}_3) x_4 + \overline{x}_5 \\ &= (x_1 x_2 + \overline{x}_3) x_4 + \overline{x}_5 \\ &= x_1 x_2 x_4 + \overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_5 \end{aligned}$$



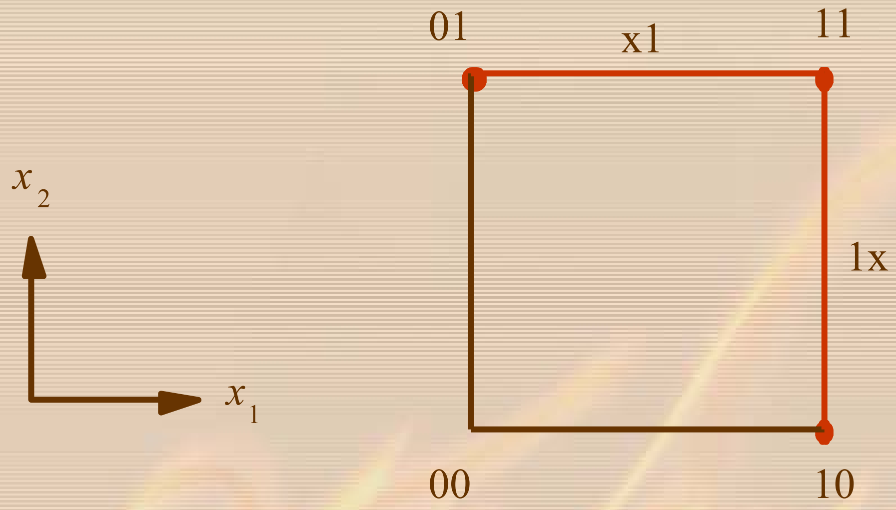
Rysunek 4.42 Analizowany układ

$$P_1 = \overline{x_2 x_3}$$
$$P_2 = \overline{x_1 P_1} = \bar{x}_1 + \bar{P}_1$$
$$P_3 = \overline{x_3 x_4} = \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$
$$P_4 = \overline{P_2 + P_3}$$
$$f = \overline{P_4 + x_5} = \bar{P}_4 \bar{x}_5$$
$$= \overline{\overline{P_2 + P_3}}\,\bar{x}_5$$
$$= (P_2 + P_3)\bar{x}_5$$
$$= (\bar{x}_1 + \bar{P}_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) x_5$$
$$= (\bar{x}_1 + x_2 x_3 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)\bar{x}_5$$
$$= (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)\bar{x}_5$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_5 + x_2\bar{x}_5 + \bar{x}_3\bar{x}_5 + \bar{x}_4\bar{x}_5$$



Rysunek 4.43 Analizowany układ

4.8. PRZESTRZENNA REPREZENTACJA FUNKCJI BOOLE'A

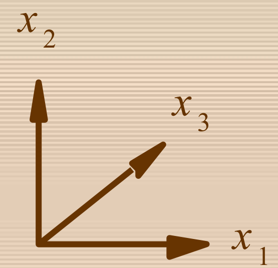


x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

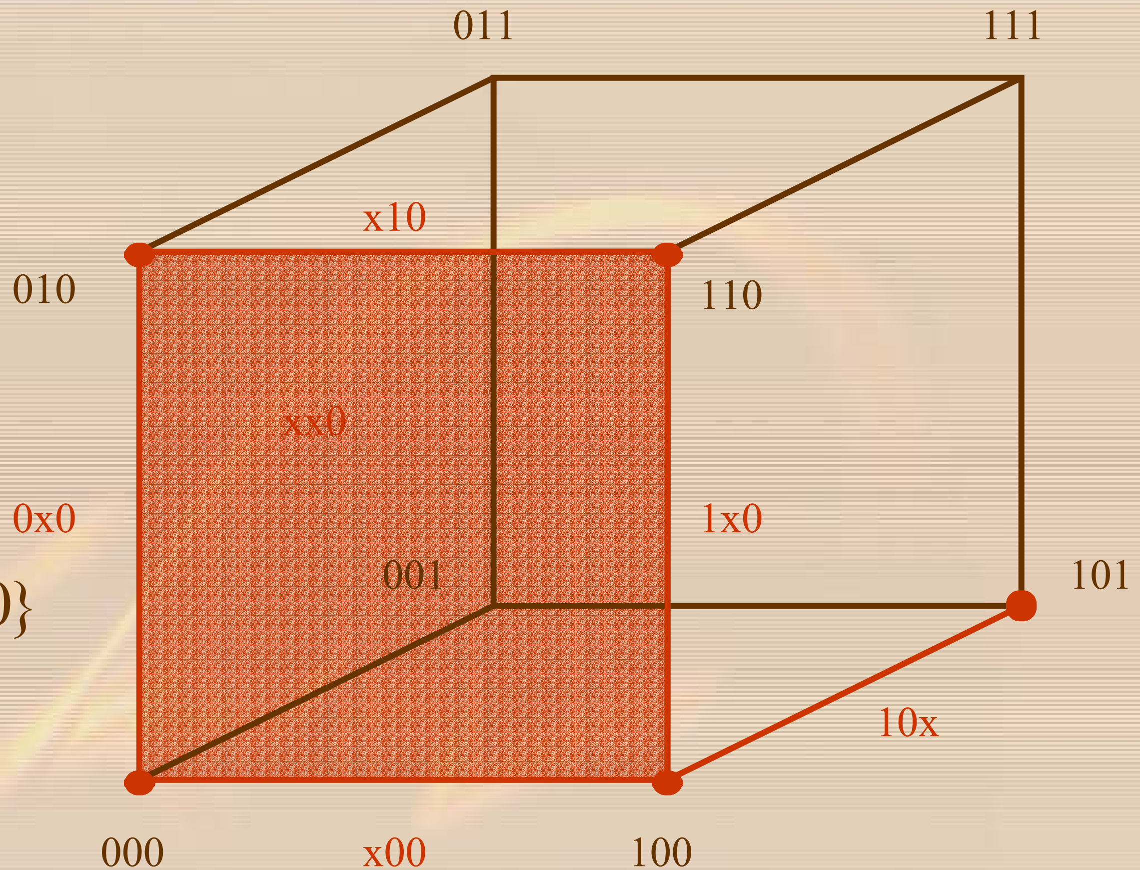
$$f = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2$$

$$f = \{1\mathrm{x}, \mathrm{x}1\} = x_1 + x_2$$

Rysunek 4.44 Funkcja $f = \Sigma\, m(1, 2, 3)$



$$
\begin{aligned}
f &= \{000, 010, 100, 101, 110\} \\
&= \{0x0, 1x0, 101\} \\
&= \{x00, x10, 101\} \\
&= \{x00, x10, 10x\} \\
&= \{xx0, 10x\}
\end{aligned}
$$

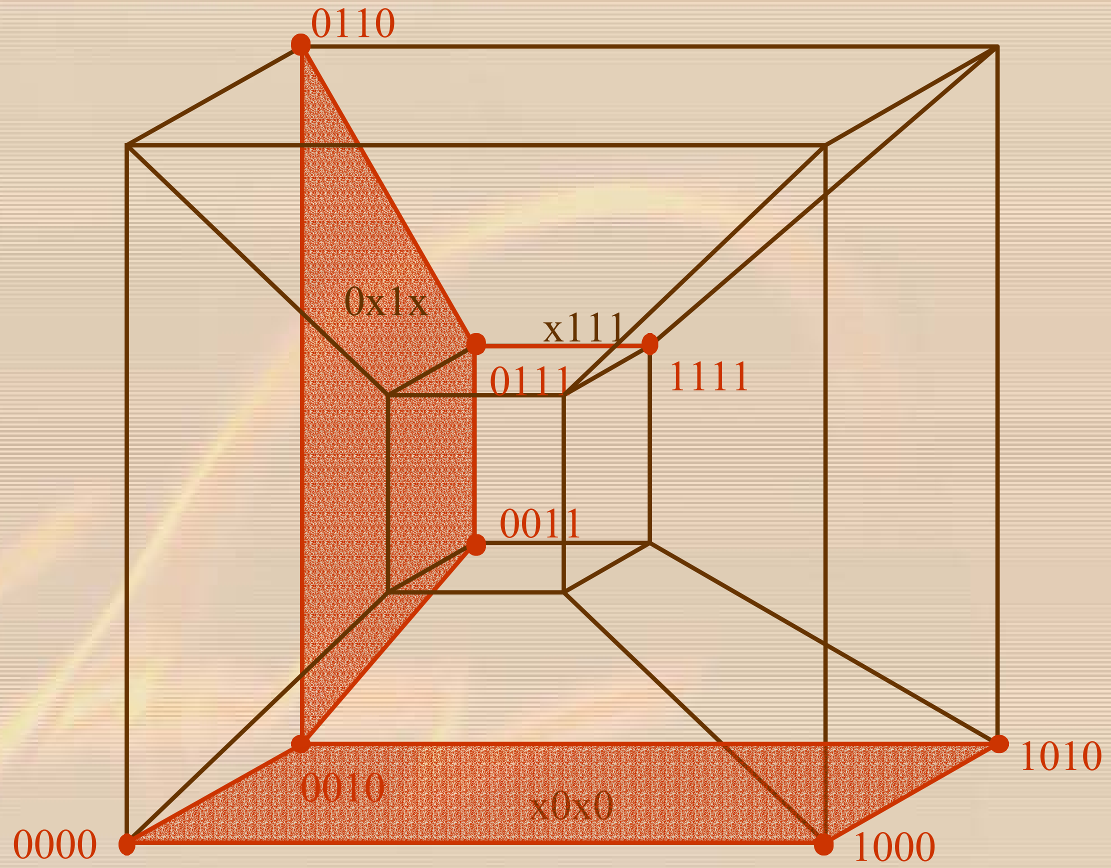


$$f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2$$

Rysunek 4.45 Funkcja $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Rysunek 4.46 Funkcja
$f = \Sigma\, m(0, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 15)$



$$f = \{0000, 0010, 0011, 0110, 0111, 1000, 1010, 1111\}$$
$$= \{00x0, 10x0, 0x10, 0x11, x111\}$$
$$= \{x0x0,\ 0x1x, x111\}$$

$$f = \bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 + x_2 x_3 x_4$$

4.9. MINIMALIZACJA FUNKCJI BOOLE'A PRZEDSTAWIONYCH ZA POMOCĄ REPREZENTACJI PRZESTRZENNEJ

Wyznaczanie implikantów prostych

Niech dane są dwa implikanty

$$A = A_1 A_2 \ldots A_n \ \text{ i } \ B = B_1 B_2 \ldots B_n$$

funkcji n zmiennych, gdzie $A_i, B_i \in \{0, 1, \mathrm{x}\}$.

Definicja operacji ($*$)

$C = A * B$ wynosi

$C = \varnothing$ gdy $A_i * B_i = \varnothing$ dla więcej niż jednego i

w przeciwnym razie

$C_i = A_i * B_i$ gdy $A_i * B_i \neq \varnothing$ oraz

$C_i = \mathrm{x}$ gdy $A_i * B_i = \varnothing$

A_i \ B_i ($A_i * B_i$)	0	1	x
0	0	$\varnothing$	0
1	$\varnothing$	1	1
x	0	1	x

Rysunek 4.47
Operacja *
dla współrzędnej i

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$A = \{0x0\}$ i $B = \{111\}$

$A_1 * B_1 = 0 * 1 = \varnothing, \quad A_2 * B_2 = x * 1 = 1, \quad A_3 * B_3 = 0 * 1 = \varnothing$

$C = A * B = \varnothing$

$A = \{11x\}$ i $B = \{10x\}$

$A_1 * B_1 = 1 * 1 = 1, \quad A_2 * B_2 = 1 * 0 = \varnothing, \quad A_3 * B_3 = x * x = x$

$C_1 = 1, C_2 = x, C_3 = x$

$C = A * B = \{1xx\}$

$A = \{1x1\}$ i $B = \{11x\}$

$A_1 * B_1 = 1 * 1 = 1, \quad A_2 * B_2 = x * 1 = 1, \quad A_3 * B_3 = 1 * x = 1$

$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$

$C = A * B = \{111\}$

$A = \{x10\}$ i $B = \{0x1\}$

$A_1 * B_1 = x * 0 = 0, \quad A_2 * B_2 = 1 * x = 1, \quad A_3 * B_3 = 0 * 1 = \varnothing$

$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = x$

$C = A * B = \{01x\}$

$A_i * B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	0	$\varnothing$	0
1	$\varnothing$	1	1
x	0	1	x

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

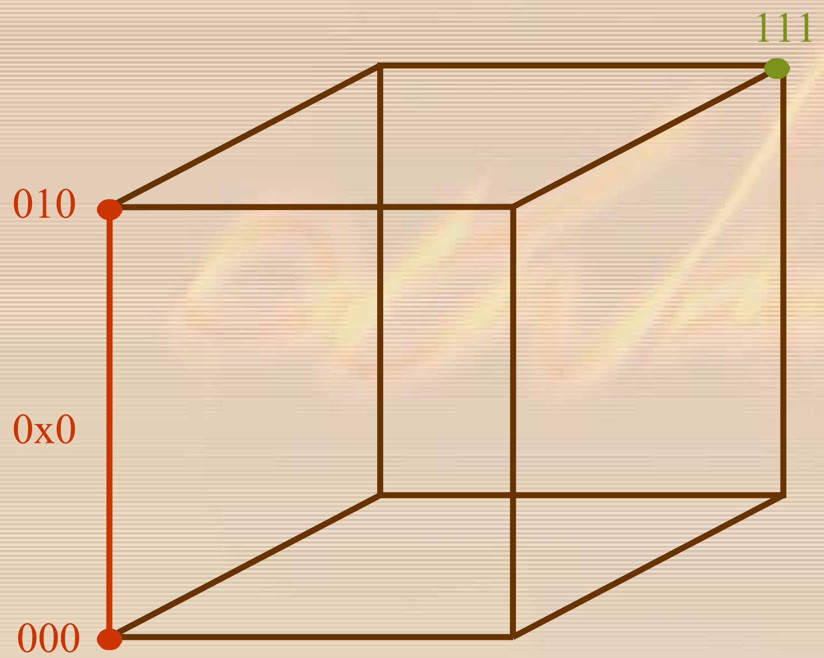
$A = \{0x0\}$ i $B = \{111\}$

$A_1 * B_1 = 0 * 1 = \varnothing, \quad A_2 * B_2 = x * 1 = 1, \quad A_3 * B_3 = 0 * 1 = \varnothing$

$C = A * B = \varnothing$

$A_i * B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	0	$\varnothing$	0
1	$\varnothing$	1	1
x	0	1	x



	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$A = \{11\mathrm{x}\}$ i $B = \{10\mathrm{x}\}$

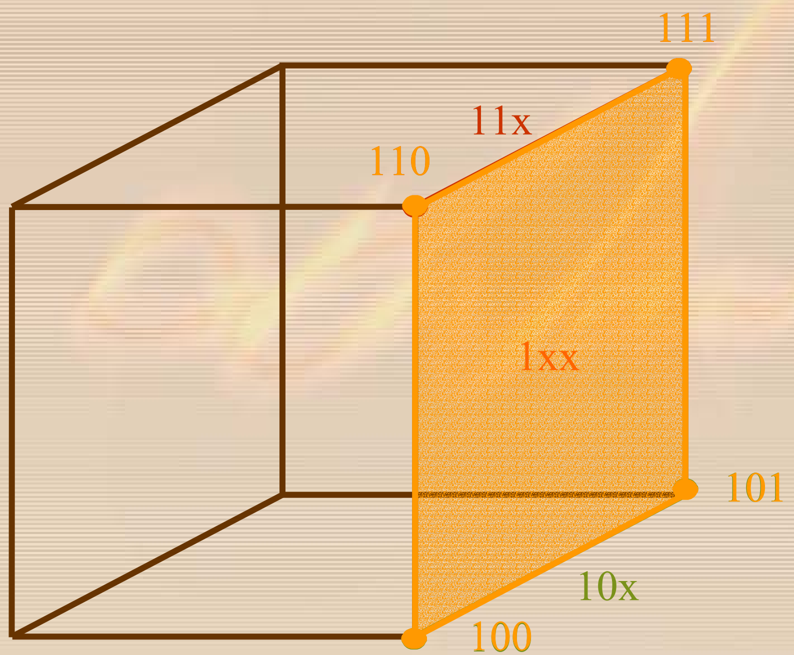
$A_1 * B_1 = 1 * 1 = 1,\quad A_2 * B_2 = 1 * 0 = \varnothing,\quad A_3 * B_3 = \mathrm{x} * \mathrm{x} = \mathrm{x}$

$C_1 = 1, C_2 = \mathrm{x}, C_3 = \mathrm{x}$

$C = A * B = \{1\mathrm{xx}\}$

$A_i * B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	0	$\varnothing$	0
1	$\varnothing$	1	1
x	0	1	x



	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

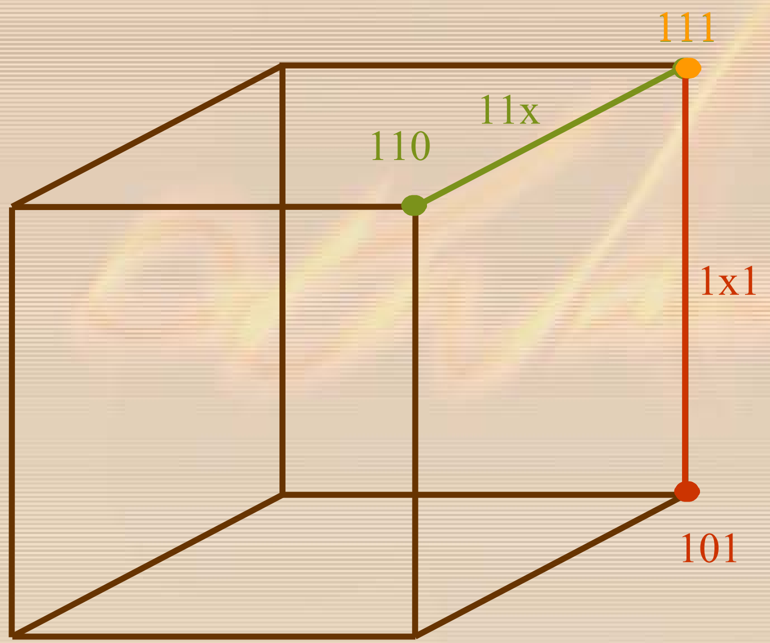
4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$A = \{1x1\}$ i $B = \{11x\}$

$A_1 * B_1 = 1 * 1 = 1,\quad A_2 * B_2 = x * 1 = 1,\quad A_3 * B_3 = 1 * x = 1$

$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$

$C = A * B = \{111\}$



$A_i * B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	0	∅	0
1	∅	1	1
x	0	1	x

	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1

4. OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$A = \{x10\}$ i $B = \{0x1\}$

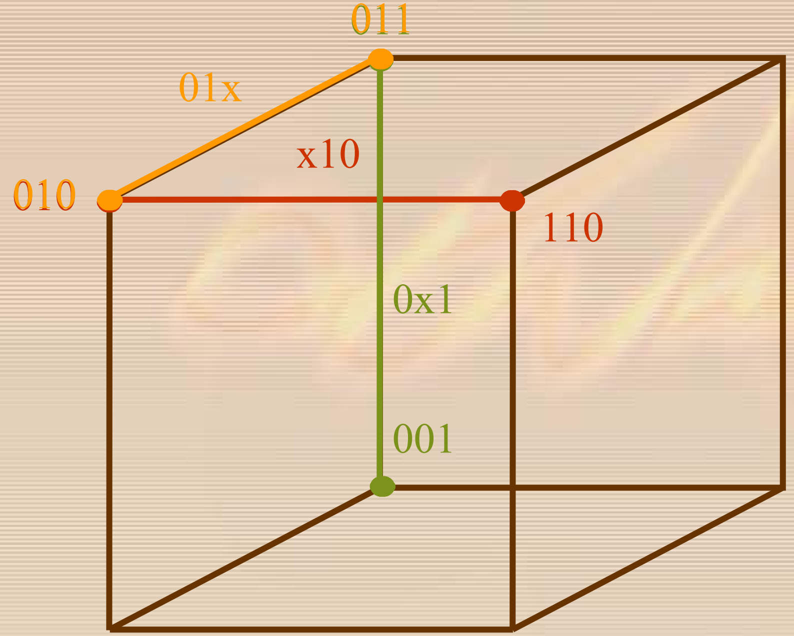
$A_1 * B_1 = x * 0 = 0, \quad A_2 * B_2 = 1 * x = 1, \quad A_3 * B_3 = 0 * 1 = \varnothing$

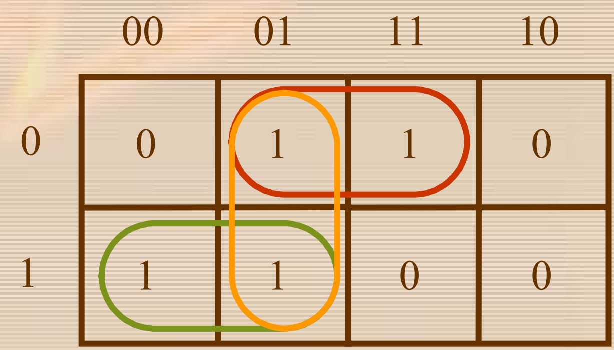
$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = x$

$C = A * B = \{01x\}$

$A_i * B_i$

$A_i \backslash B_i$	0	1	x
0	0	$\varnothing$	0
1	$\varnothing$	1	1
x	0	1	x





4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Niech C^k oznacza pokrycie funkcji f, a c^i oraz c^j dwa dowolne implikanty z C^k

Niech G^{k+1} będzie zbiorem implikantów utworzonych z pokrycia C^k gdzie

$$G^{k+1} = c^i * c^j \text{ dla wszystkich } c^i, c^j \in C^k$$

Nowe pokrycie C^{k+1} funkcji f wynosi

$$C^{k+1} = C^k \cup G^{k+1} - \text{ nadmierne (zbędne) implikanty}$$

Implikant $A = A_1A_2...A_n$ jest nadmierny, jeżeli zawiera się w jakimś innym implikancie $B = B_1B_2...B_n$ co oznacza, że $A_i = B_i$ lub $B_i = \mathrm{x}$ dla każdego i.

Jeżeli $C^{k+1} \neq C^k$ to należy wyznaczyć pokrycie C^{k+2},

Jeżeli $C^{k+1} = C^k$ to jest ono pokryciem funkcji f składającym się wyłącznie z implikantów prostych

Przykład 4.4

$$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_7$$

$$C^0 = \{000, 001, 010, 011, 111\}$$

$$G^1 = \{00x, 0x0, 0x1, 01x, x11\}$$

$C^1 = C^0 \cup G^1$ – (nadmierne implikanty) = G^1

$$G^2 = \{000, 001, 0xx, 0x1, 010, 01x, 011\}$$

$C^2 = C^1 \cup G^2$ – nadmierne implikanty = {x11, 0xx}

$$G^3 = \{011\}$$

$C^3 = C^2 \cup G^3$ – nadmierne implikanty = {x11, 0xx} = C^2

$$f = \{x11, 0xx\} = \bar{x}_1 + x_2 x_3$$

Przykład 4.5

$$C^0 = \{0101, 1101, 1110, 011x, x01x\}$$

$$C^1 = \{x01x, x101, 01x1, x110, 1x10, 0x1x\}$$

$$C^2 = \{x01x, x101, 01x1, \ 0x1x, xx10\}$$

$$C^3 = C^2$$

$$\bar{x}_2 x_3,\ x_2 \bar{x}_3 x_4,\ \bar{x}_1 x_2 x_4,\ \bar{x}_1 x_3,\ x_3 \bar{x}_4$$

Wyznaczanie implikantów istotnych

Niech dane są dwa implikanty

$$A = A_1 A_2 \ldots A_n \text{ i } B = B_1 B_2 \ldots B_n$$

funkcji n zmiennych, gdzie $A_i, B_i \in \{0, 1, \mathrm{x}\}$.

Definicja operacji (#)

$C = A \# B$ wynosi

1. $C = A$ gdy $A_i \# B_i = \varnothing$ przynajmniej dla jednego i
2. $C = \varnothing$ gdy $A_i \# B_i = \varepsilon$ dla wszystkich i

   w przeciwnym razie

   $C = \cup_i (A_1 A_2 \ldots \bar{B}_i \ldots A_n)$ dla wszystkich i

   dla których $A_i = \mathrm{x}$ i $B_i \neq \mathrm{x}$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε

Rysunek 4.48
Operacja #
dla współrzędnej i

$A = \{0x1\}$ i $B = \{11x\}$
$A_1 \# B_1 = 0 \# 1 = \varnothing,\quad A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0,\quad A_3 \# B_3 = 1 \# x = \varepsilon$
$C = A \# B = \{0x1\}$

$A = \{0x1\}$ i $B = \{0xx\}$
$A_1 \# B_1 = 0 \# 0 = \varepsilon,\quad A_2 \# B_2 = x \# x = \varepsilon,\quad A_3 \# B_3 = 1 \# x = \varepsilon$
$C = A \# B = \varnothing$

$A = \{0xx\}$ i $B = \{x1x\}$
$A_1 \# B_1 = 0 \# x = \varepsilon,\quad A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0,\quad A_3 \# B_3 = x \# x = \varepsilon$
$C = A \# B = \{00x\}$

$A = \{0xx\}$ i $B = \{x10\}$
$A_1 \# B_1 = 0 \# x = \varepsilon,\quad A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0,\quad A_3 \# B_3 = x \# 0 = 1$
$C = A \# B = \{00x, 0x1\}$

$A_i \# B_i$

$A_i \backslash B_i$	0	1	x
0	ε	$\varnothing$	ε
1	$\varnothing$	ε	ε
x	1	0	ε

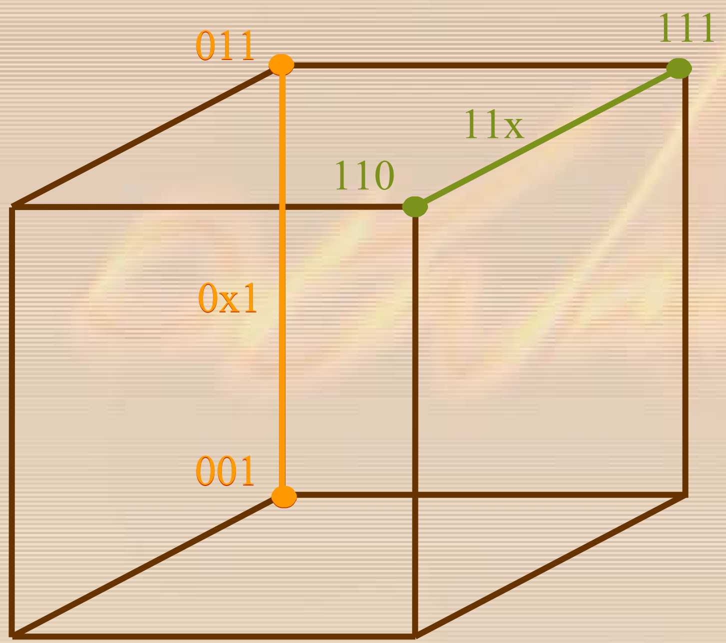
$A = \{0x1\}$ i $B = \{11x\}$

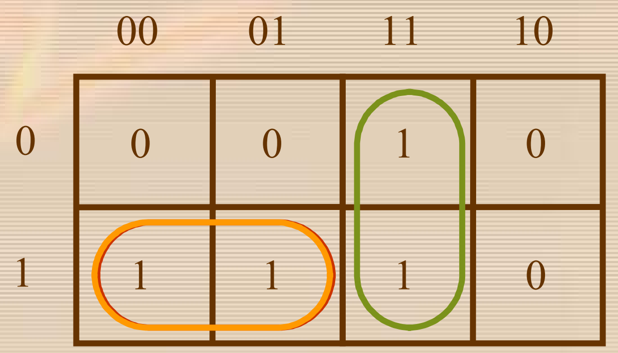
$A_1 \# B_1 = 0 \# 1 = \varnothing, \quad A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0, \quad A_3 \# B_3 = 1 \# x = \varepsilon$

$C = A \# B = \{0x1\}$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε





4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

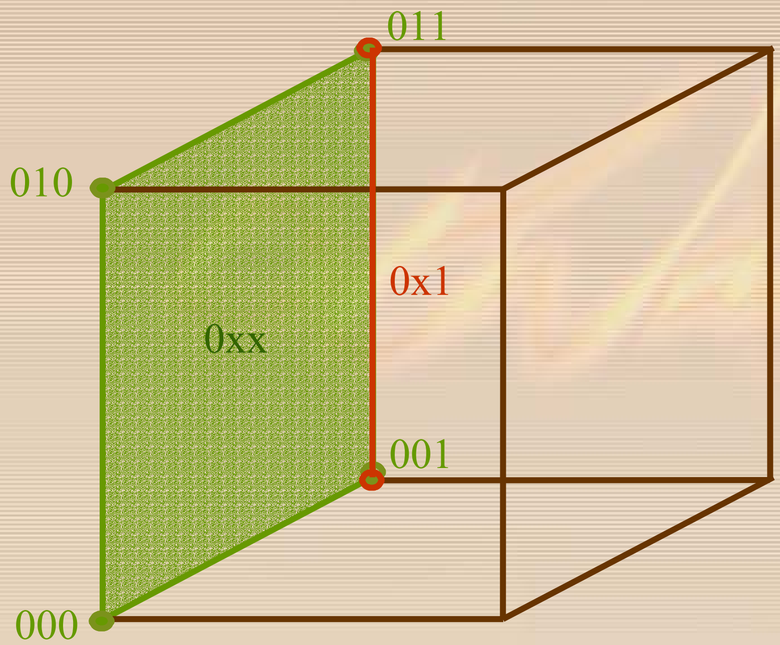
$A = \{0x1\}$ i $B = \{0xx\}$

$A_1 \# B_1 = 0 \# 0 = \varepsilon,\quad A_2 \# B_2 = x \# x = \varepsilon,\quad A_3 \# B_3 = 1 \# x = \varepsilon$

$C = A \# B = \varnothing$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε



	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

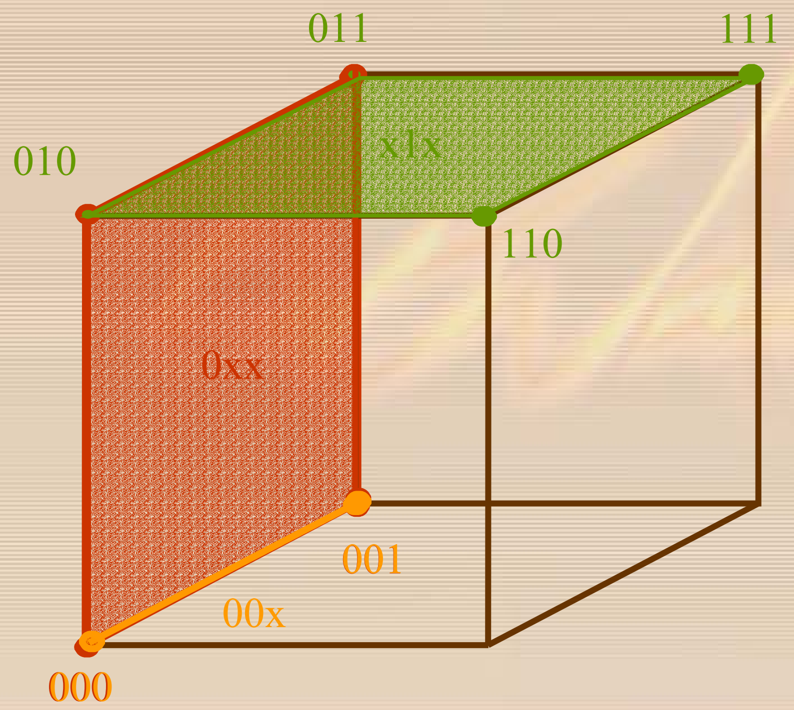
$A = \{0xx\}$ i $B = \{x1x\}$

$A_1 \# B_1 = 0 \# x = \varepsilon$, $A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0$, $A_3 \# B_3 = x \# x = \varepsilon$

$C = A \# B = \{00x\}$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε



	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	1	0

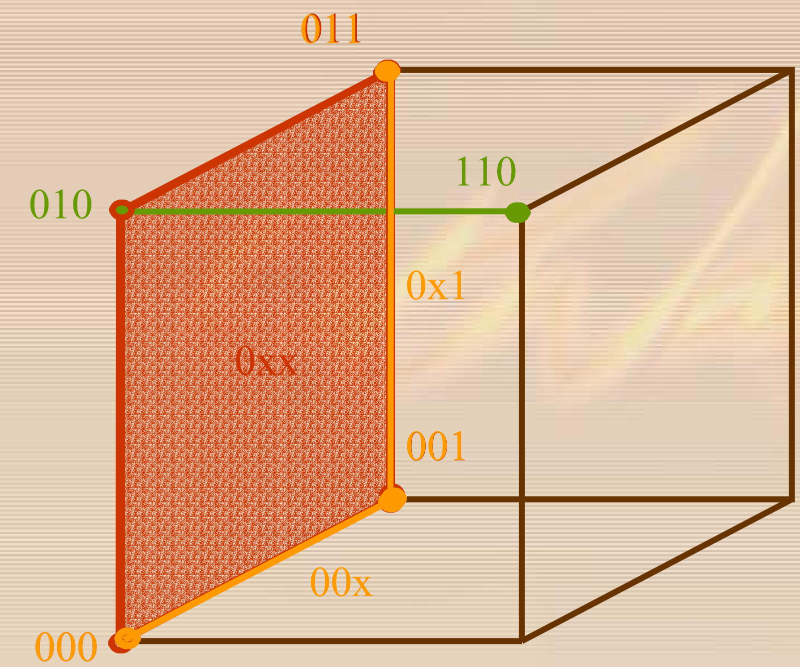
$A = \{0xx\}$ i $B = \{x10\}$

$A_1 \# B_1 = 0 \# x = \varepsilon, \quad A_2 \# B_2 = x \# 1 = 0, \quad A_3 \# B_3 = x \# 0 = 1$

$C = A \# B = \{00x\}$ i $\{0x1\}$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε



	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	0	0

4. OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Niech P oznacza zbiór wszystkich implikantów prostych funkcji f.

Niech p^i oznacza implikant prosty ze zbioru P, a DC zbiór wierzchołków, dla których wartość funkcji jest dowolna.
Implikant p^i jest implikantem istotnym wtedy i tylko wtedy gdy

$$p^i \# (P - p^i) \# DC \neq \varnothing$$

$p^i \# (P - p^i)$ oznacza, że operacja # jest wykonana dla implikanta p^i kolejno ze wszystkimi pozostałymi implikantami ze zbioru P

Na przykład dla zbiorów $P = \{p^1, p^2, p^3, p^4\}$ oraz $DC = \{d^1, d^2\}$
p^3 jest imlikantem istotnym wtedy i tylko wtedy gdy

$$((((p^3 \# p^1) \# p^2) \# p^4) \# d^1) \# d^2) \neq \varnothing$$

Przykład 4.6

$$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_7$$

$$C^0 = \{000, 001, 010, 011, 111\}$$

$$P = \{x11, 0xx\}$$

$$x11\ \#\ 0xx = 111 \neq \varnothing$$

$$0xx\ \#\ x11 = (00x, 0x0\} \neq \varnothing$$

$A_i \backslash B_i$ ($A_i \# B_i$)	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε

Przykład 4.7

$$P = \{x01x, x101, 01x1, 0x1x, xx10\}$$

$$x01x \# (P - x01x) = 1011 \neq \varnothing$$

gdyż

$$x01x \# x101 = x01x$$
$$x01x \# 01x1 = x01x$$
$$x01x \# 0x1x = 101x$$
$$101x \# xx10 = 1011$$

$$x101 \# (P - x101) = 1101 \neq \varnothing$$

$$01x1 \# (P - 01x1) = \varnothing$$

$$0x1x \# (P - 0x1x) = \varnothing$$

$$xx10 \# (P - xx10) = 1110 \neq \varnothing$$

$A_i \# B_i$

A_i \ B_i	0	1	x
0	ε	∅	ε
1	∅	ε	ε
x	1	0	ε

Procedura wyznaczania funkcji minimalnej dla reprezentacji przestrzennej

1. Wyznacz zbiór P wszystkich implikantów prostych ze zbioru wierzchołków C^0 za pomocą operacji * .
2. Znajdź zbiór implikantów istotnych za pomocą operacji #.
3. Jeżeli zbiór implikantów istotnych nie jest pokryciem funkcji to dołącz do niego tylko te implikanty proste, dla których koszt funkcji będzie minimalny.

Przykład 4.7

$x_5 = 0$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	d	
01		d	1	
11				
10	1		d	1

$x_5 = 1$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1			
01				
11		1	1	1
10	d	1		1

Rysunek 4.49 Przykład funkcji pięciu zmiennych

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum m(0,1,4,8,13,15,20,21,23,26,31)+D(5,10,24,28)$$

$$C^0=\{00000,00001,00100,01000,01101,01111,10100,10101,$$
$$10111,11010,11111,00101,01010,11000,11100\}$$

$$C^1=\{0000x,00x00,0x000,00x01,x0100,0010x,010x0,x1000,$$
$$011x1,0x101,x1111,1010x,1x100,101x1,x0101,1x111,$$
$$x1010,110x0,11x00\}$$

$$C^2=\{0x000,011x1,0x101,x1111,1x100,101x1,1x111,11x00,$$
$$00x0x,x010x,x10x0\}$$

$$C^3=C^2$$

$$P=C^2$$

4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Są tylko dwa istotne implikanty wyznaczone operacją #:

00x0x tylko on pokrywa wierzchołek 00001

x10x0 tylko on pokrywa wierzchołek 11010

Oba realizują funkcję $m(0, 1, 4, 8, 26)$.

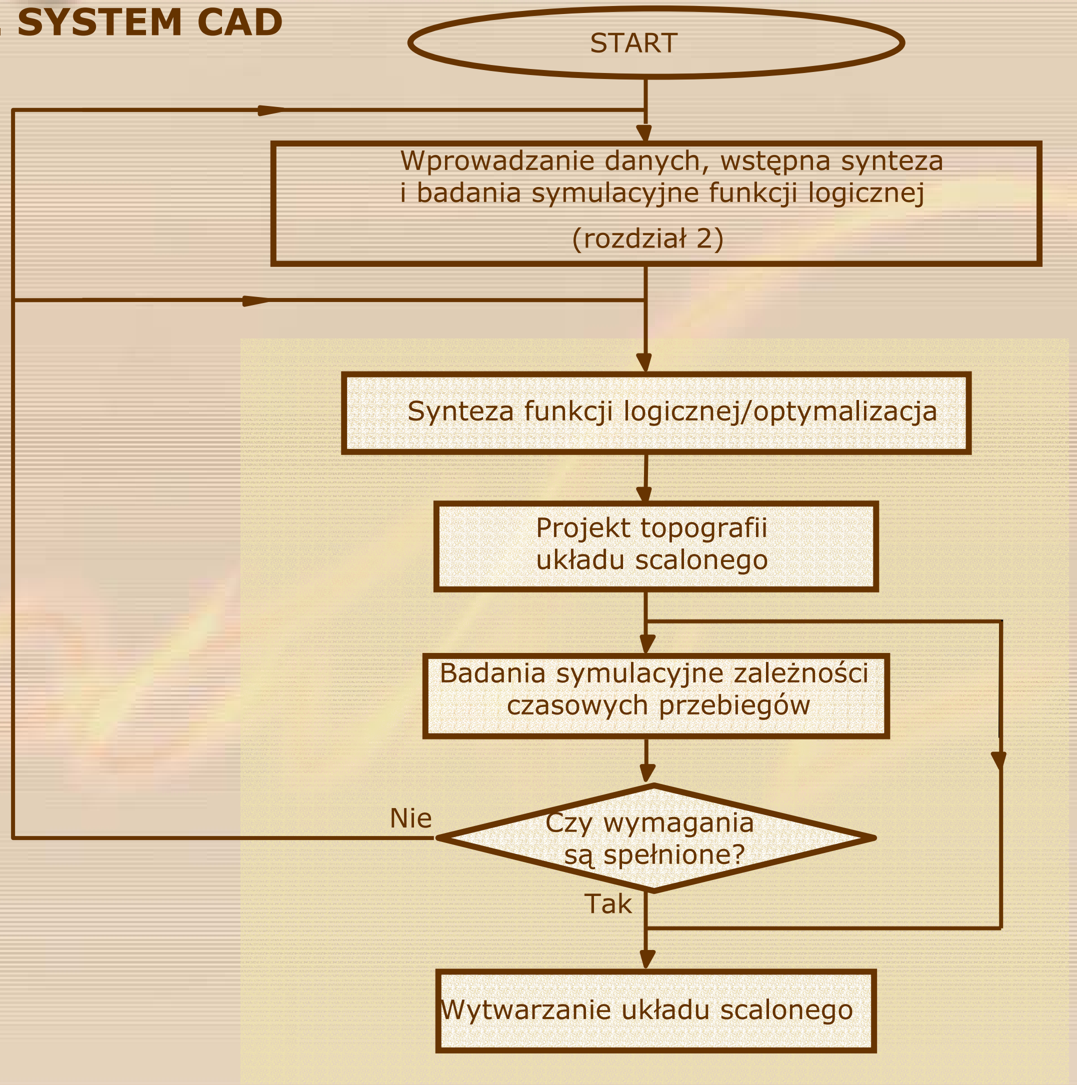
Dla pokrycia wierzchołka $m(20)$ lepiej jest wybrać implikant prosty x010x niż 1x100, ponieważ dodatkowo pokrywa wierzchołek $m(21)$, podczas gdy ten drugi dodatkowo pokrywa jedynie wierzchołek $D(28)$.

Pozostają wierzchołki $m(13, 15, 23, 31)$, które najlepiej pokryć implikantami prostymi 011x1 i 1x111. Ostatecznie

$C_{minimum} = \{00x0x, x10x0, x010x, 011x1, 1x111\}$

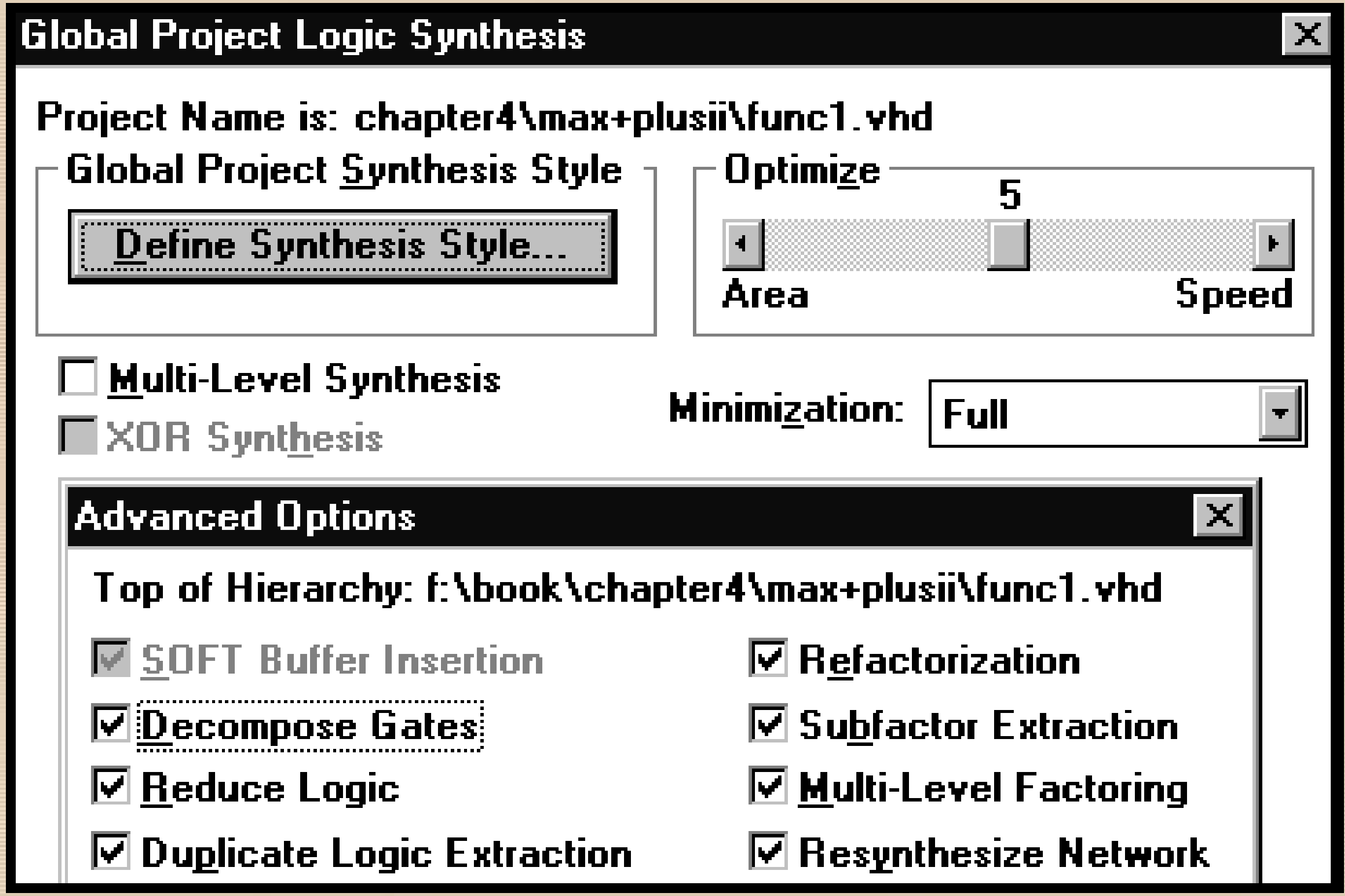
$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_5 + \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5$$

4.10. SYSTEM CAD



Rysunek 4.50 Schemat blokowy systemu CAD

Synteza funkcji logicznej/optymalizacja



Rysunek 4.51 Opcje syntezy logicznej w środowisku MAX+PLUS II

Przed syntezą

```
ENTITY func1 IS
        PORT ( x1, x2, x3   : IN      BIT;
                     f                  : OUT    BIT );
END func1 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF func1 IS
BEGIN
        f <= (NOT x1 AND NOT x2 AND x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND NOT x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND x3) OR
               (x1 AND x2 AND NOT x3) ;
END LogicFunc ;
```

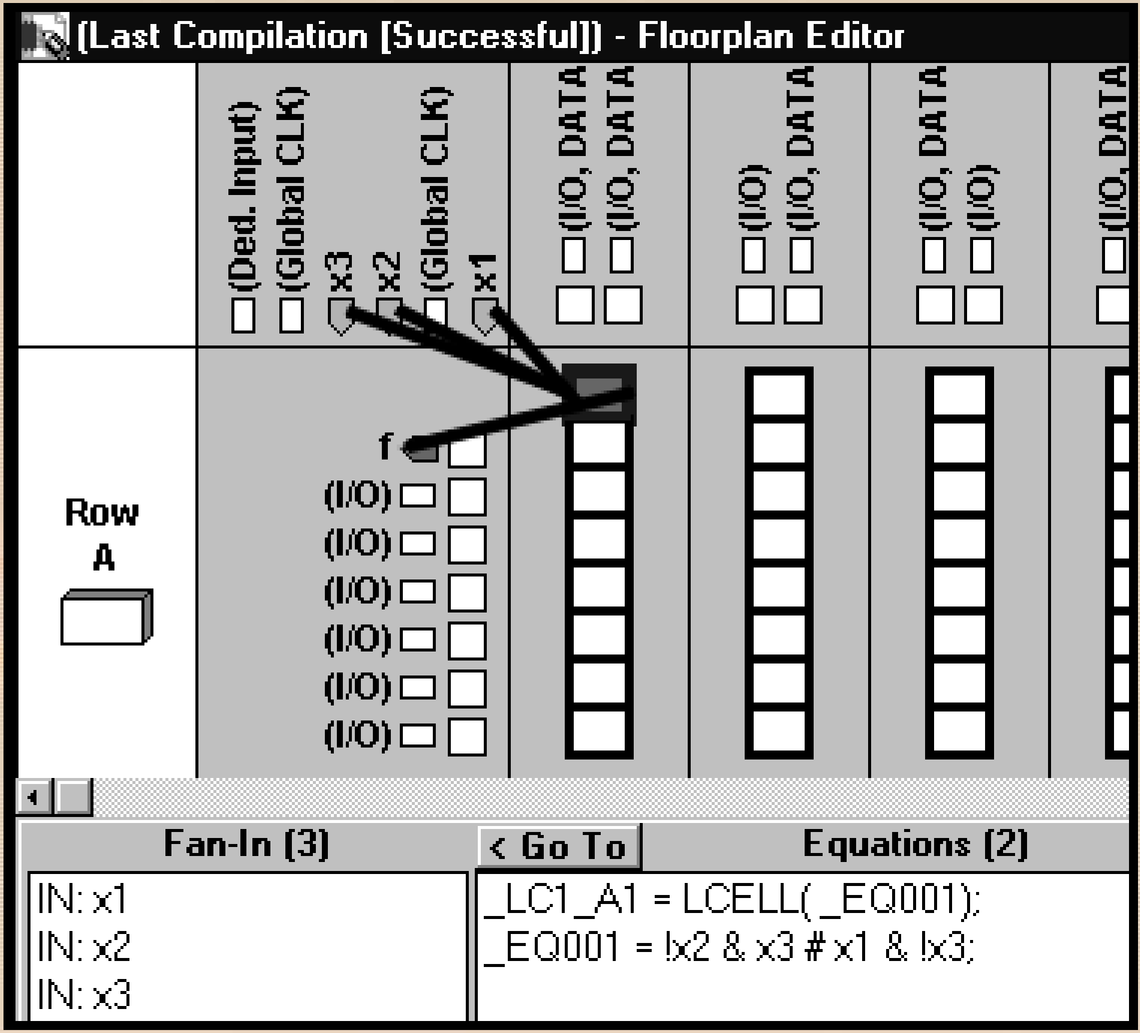
Rysunek 4.49 Kod funkcji $f = \Sigma\, m(1, 4, 5, 6)$ w języku VHDL

Po syntezie

$$f = \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_3$$

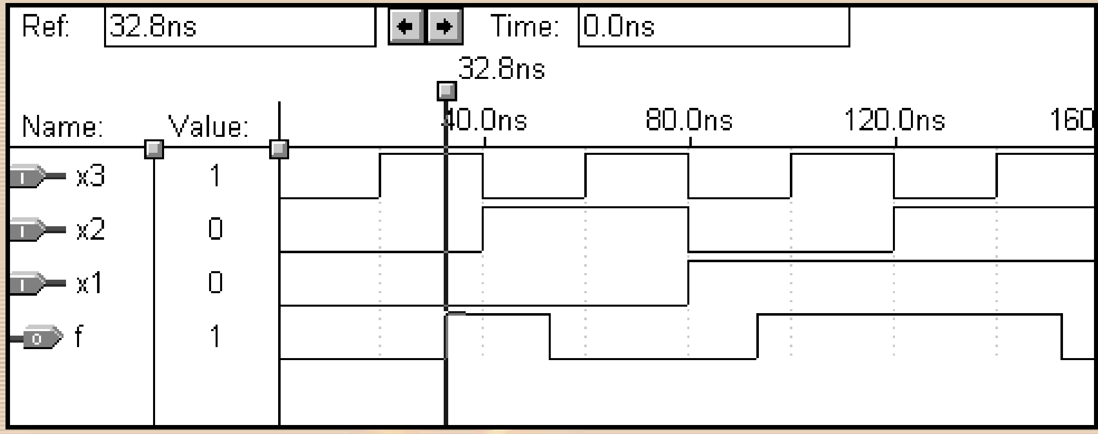
Rysunek 4.52 Funkcja $f = \Sigma\, m(1, 4, 5, 6)$ po syntezie do realizacji w układzie FPGA

Projekt topografii układu scalonego

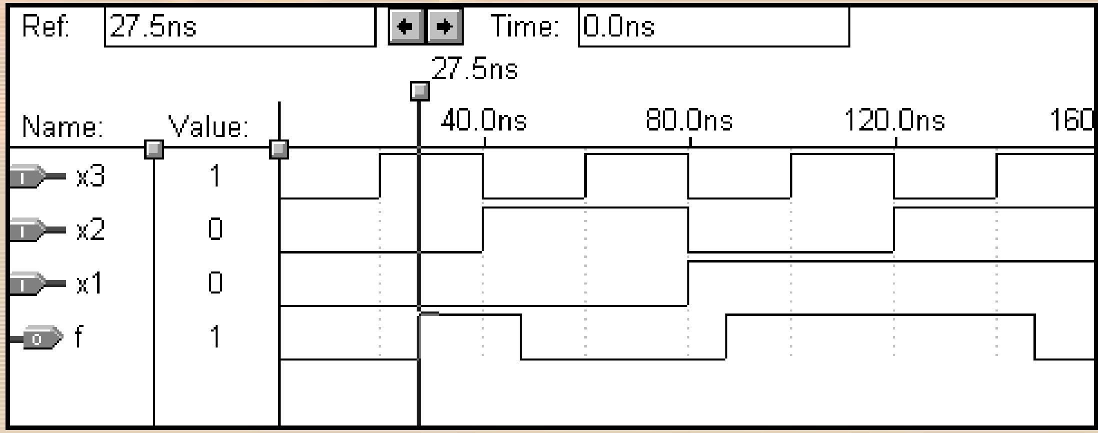


Rysunek 4.53 Przykładowy rezultat projektu topografii układu scalonego FPGA w środowisku MAX+PLUS II

Badania symulacyjne zależności czasowych przebiegów



(a) Zależności czasowe w układzie FPGA



(b) Zależności czasowe w układzie CPLD

Rysunek 4.54 Badania symulacyjne zależności czasowych w środowisku MAX+PLUS II

4.11. PRZYKŁADY SYNTEZY UKŁADÓW PRZEDSTAWIONYCH ZA POMOCĄ JĘZYKA VHDL

```
LIBRARY ieee;
USE ieee.std_logic_1164.all ;

ENTITY func2 IS
        PORT ( x1, x2, x3   : IN     STD_LOGIC;
                  f                  : OUT    STD_LOGIC );
END func2 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF func2 IS
BEGIN
        f <= (NOT x1 AND NOT x2 AND x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND NOT x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND x3) OR
               (x1 AND x2 AND NOT x3) ;
END LogicFunc ;
```

Rysunek 4.55 Funkcja $f = \Sigma\, m(1, 4, 5, 6)$ przedstawiona w języku VHDL z pakietem STD_LOGIC_1164

Przykład 4.8

Dokonaj syntezy funkcji $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$ przedstawionej w języku VHDL

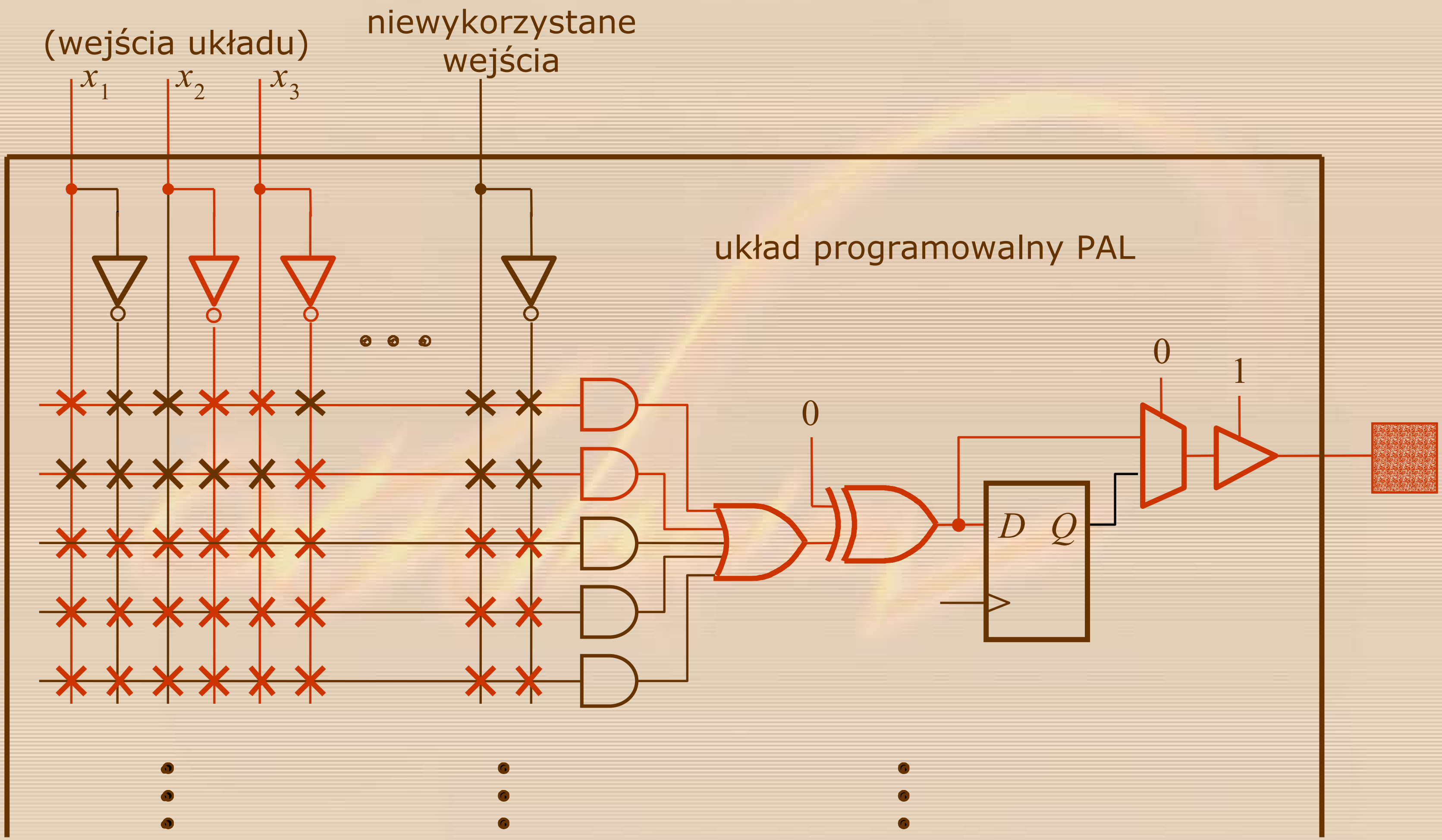
```
LIBRARY ieee;
USE ieee.std_logic_1164.all ;

ENTITY func3 IS
        PORT ( x1, x2, x3   : IN      STD_LOGIC;
                    f               : OUT    STD_LOGIC );
END func3 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF func3 IS
BEGIN
        f <= (NOT x1 AND NOT x2 AND NOT x3) OR
               (NOT x1 AND x2 AND NOT x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND NOT x3) OR
               (x1 AND NOT x2 AND x3) OR
                  (x1 AND x2 AND NOT x3) ;
END LogicFunc ;
```

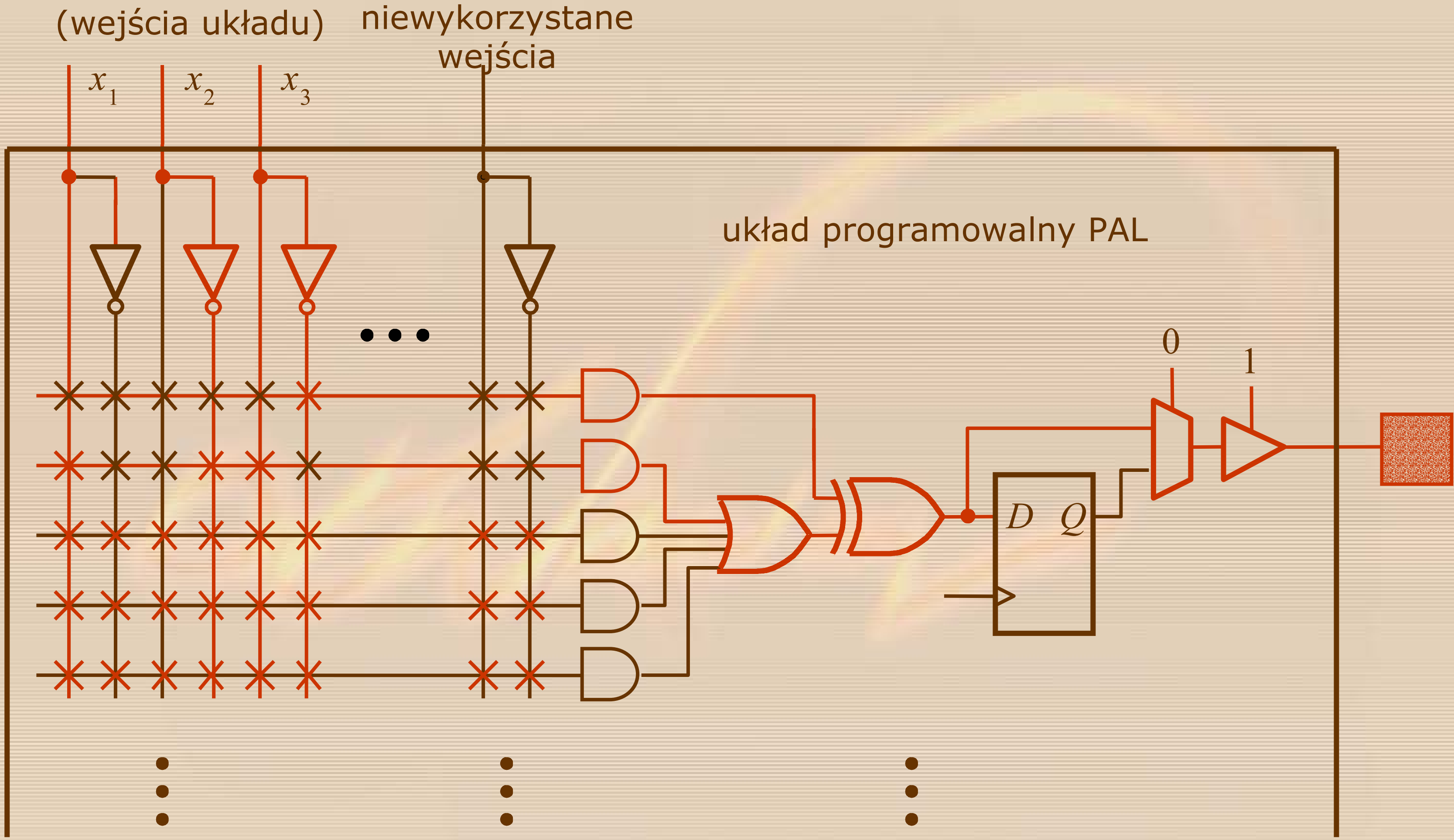
4.OPTYMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH

Po syntezie $f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3$



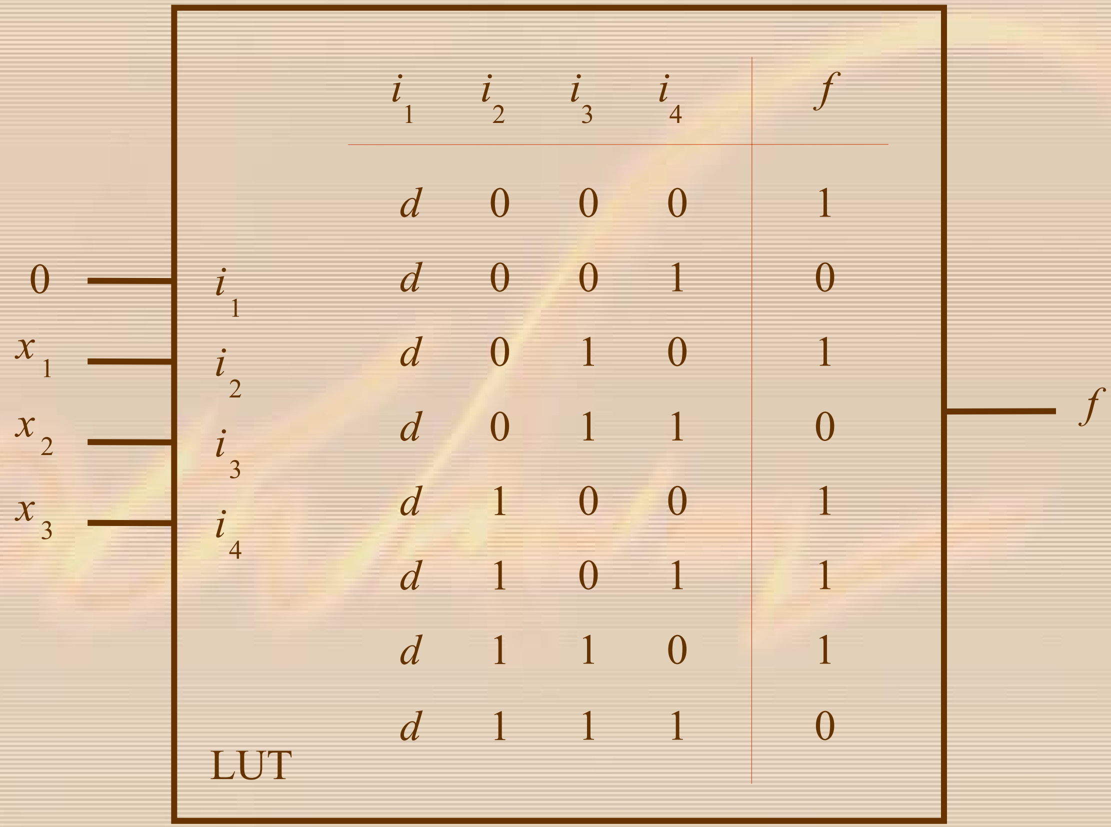
Rysunek 4.56 Implementacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$ w układzie CPLD

Po syntezie $f = \bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2 x_3$



Rysunek 4.57 Implementacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$ w układzie CPLD za pomocą syntezy XOR

Po syntezie $f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2$



i_1	i_2	i_3	i_4	f
d	0	0	0	1
d	0	0	1	0
d	0	1	0	1
d	0	1	1	0
d	1	0	0	1
d	1	0	1	1
d	1	1	0	1
d	1	1	1	0

Rysunek 4.58 Implementacja funkcji $f = \Sigma\, m(0, 2, 4, 5, 6)$ w układzie FPGA za pomocą tablic LUT

Przykład 4.9

Dokonaj syntezy funkcji $f = \Sigma\, m(2, 3, 9, 10, 11, 13)$ przedstawionej w języku VHDL

```
LIBRARY ieee;
USE ieee.std_logic_1164.all ;

ENTITY func4 IS
        PORT ( x1, x2, x3, x4   : IN      STD_LOGIC;
                    f                       : OUT    STD_LOGIC );
END func4 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF func4 IS
BEGIN
        f <= (NOT x1 AND NOT x2 AND x3 AND NOT x4) OR
               (NOT x1 AND NOT x2 AND x3 AND x4) OR
               (x1 AND NOT x2 AND NOT x3 AND x4) OR
               (x1 AND NOT x2 AND x3 AND NOT x4) OR
                    (x1 AND NOT x2 AND x3 AND x4) OR
                    (x1 AND x2 AND NOT x3 AND x4) ;
END LogicFunc ;
```

Po syntezie $f = \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_3 x_4$

Przykład 4.10

Dokonaj syntezy funkcji

$$f(x_1,\ldots,x_7)=x_1x_3\bar{x}_6+x_1x_4x_5\bar{x}_6+x_2x_3x_7+x_2x_4x_5x_7$$

przedstawionej w języku VHDL

```
LIBRARY ieee;
USE ieee.std_logic_1164.all ;

ENTITY func5 IS
	PORT ( x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7   : IN      STD_LOGIC;
	          f                          : OUT    STD_LOGIC );
END func5 ;

ARCHITECTURE LogicFunc OF func5 IS
BEGIN
	f <= (x1 AND x3 AND NOT x6) OR
	     (x1 AND x4 AND x5 AND NOT x6) OR
	     (x2 AND x3 AND x7) OR
	     (x2 AND x4 AND x5 AND x7) ;
END LogicFunc ;
```

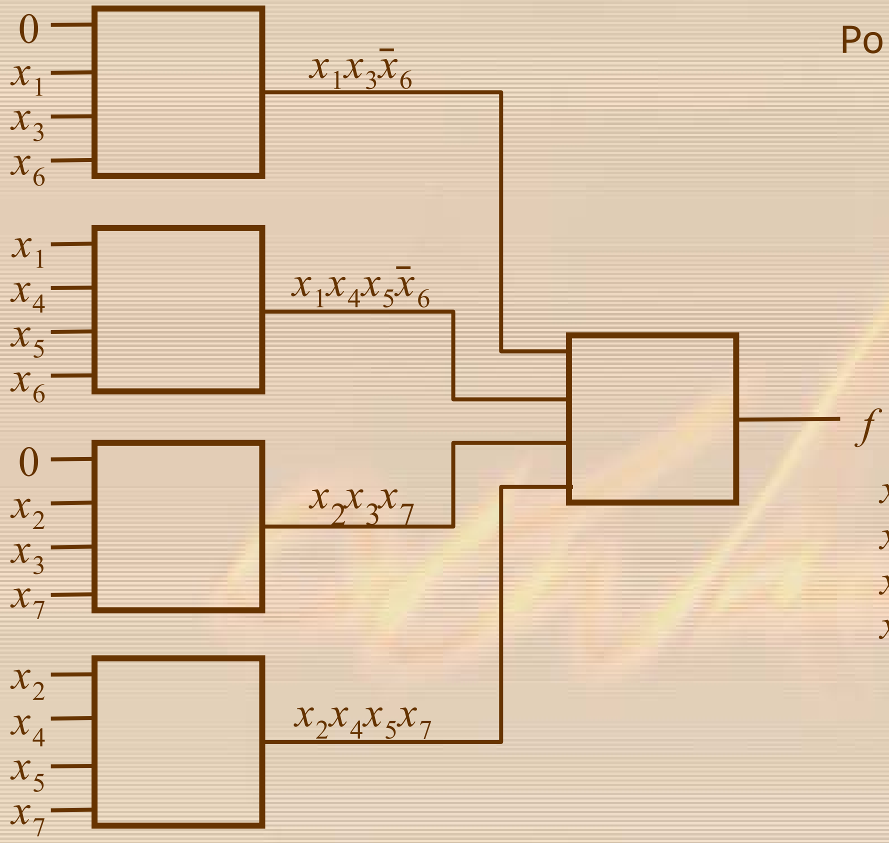
$$f(x_1,\ldots,x_7) = x_1x_3\bar{x}_6 + x_1x_4x_5\bar{x}_6 + x_2x_3x_7 + x_2x_4x_5x_7$$

Po syntezie $f = (x_1\bar{x}_6 + x_2x_7)(x_3 + x_4x_5)$

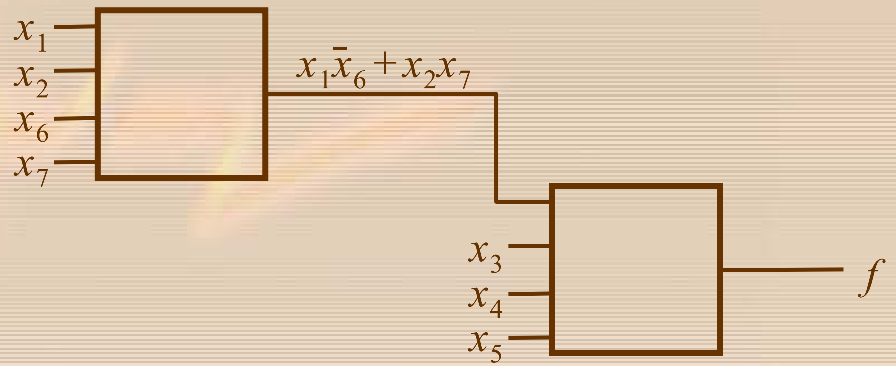
$$= S(x_3 + x_4x_5)$$

$$= Sx_3 + Sx_4x_5$$

gdzie $S = x_1\bar{x}_6 + x_2x_7$



(a) Realizacja sumy iloczynów



(b) Realizacja funkcji po faktoryzacji

Rysunek 4.59 Dwie implementacje funkcji siedmiu zmiennych w układzie FPGA