Elementy Modelowania Matematycznego

Wykład 8

Programowanie nieliniowe

Spis treści

- Programowanie nieliniowe

Zadanie programowania nieliniowego

- Zadanie programowania nieliniowego jest identyczne jak dla programowania liniowego, ale w przeciwieństwie do programowania liniowego, nie istnieje jeden uniwersalny algorytm rozwiązywania zadań programowania nieliniowego.
- Wynika to z faktu iż funkcje nieliniowe stanowią (w pewnym sensie) dużo bardziej obszerną rodzinę funkcji niż funkcje liniowe.

Zadanie programowania nieliniowego

- Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:
  - występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
  - występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło - stad nazwa),

Zadanie programowania nieliniowego

- nieciągłości (’przerwy’ w wykresach),
- osobliwości (funkcja dąży do plus lub minus nieskończoności dla skończonej wartości argumentu).
- Wszystko to powoduje, że poszukiwanie rozwiązania konkretnych zadań programowania nieliniowego zależy od szczególnej postaci tego zadania.

Zadanie programowania nieliniowego

- Niektóre zadania programowania nieliniowego można rozwiązać:
  - przy pomocy specjalnego algorytmu, jeśli zadanie zalicza się do jednego z podtypów, dla których takie algorytmy są znane;
  - metodą simpleks, jeżeli istnieje możliwość przekształcenia w zadanie programowania liniowego np. tzw. Programowanie ilorazowe

Zadanie programowania nieliniowego

- Przekształcając do postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego – przykładem może być zadanie transportowo-produkcyjne ze stałym kosztem uruchomienia produkcji czy zadanie optymalnej diety ze stałymi kosztami zakupu.
- W ogólnym przypadku nie ma niestety żadnej gwarancji, że zadanie da się rozwiązać.

Programowanie ilorazowe

- Zadanie programowania ilorazowego jest to maksymalizacja lub minimalizacja ilorazu dwóch funkcji liniowych przy ograniczeniach liniowych.
- Standardowa postać zadania programowania ilorazowego wygląda następująco:

$$\frac{c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}{d_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n} \to \min \quad \max$$

Programowanie ilorazowe

- Przy ograniczeniach:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$x_1 \geq 0, \ldots x_n \geq 0$
Jeśli $d_0 + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n \neq 0$ dla $(x_1, \ldots, x_n \in D$ to zadanie programowania ilorazowego można sprowadzić do zadania programowania liniowego.

Programowanie ilorazowe

- Wprowadźmy nowe zmienne:

$$y_1 = \frac{x_1}{d_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = \frac{x_n}{d_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n}$$

$$t = \frac{1}{d_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n}$$

Programowanie ilorazowe

- Wtedy

$$x_i = \frac{y_i}{t}$$

- i poszukiwanie rozwiązania zadania programowania ilorazowego sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego.

Programowanie ilorazowe

- Rozwiązywanie graficzne zadania programowania ilorazowego z dwiema zmiennymi wygląda analogicznie jak rozwiązywanie graficzne zadania programowania liniowego tzn. należy wykreślić w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań dopuszczalnych, a następnie sprawdzać wartości funkcji celu dla współrzędnych wierzchołków.

Programowanie ilorazowe

- Niemniej jednak przekształcenie w zadanie programowania liniowego w podany wyżej sposób nie jest akurat w tym przypadku ułatwieniem, ponieważ przekształcenie to wprowadza dodatkową zmienną t, co prowadziłoby do konieczności sporządzenia wykresu 3-wymiarowego.

Programowanie ilorazowe

- Programowanie ilorazowe jest stosowane przy problemach decyzyjnych wymagających pogodzenia ze sobą dwóch sprzecznych kryteriów optymalności np.

$$\frac{\text{zysk}}{\text{pracochłonność}} \longrightarrow \text{max}$$

$$\frac{\text{przychód}}{\text{koszty}} \longrightarrow \text{max}$$

$$\frac{\text{koszty paszy}}{\text{dzienny przyrost masy zwierząt}} \longrightarrow \text{min}$$

Programowanie nieliniowe

- Szukanie ekstremum bezwarunkowego
- Funkcja celu f osiąga bezwarunkowe ekstremum w punkcie stacjonarnym w przypadku nieujemnej wartości wyznacznika macierzy drugich pochodnych funkcji celu f po poszczególnych zmiennych i ich kombinacjach.
- Ponadto wszystkie minory główne takiej macierzy muszą być dodatnie.

Programowanie nieliniowe

- Współrzędne punktu stacjonarnego można otrzymać przyrównując do zera wartości pierwszych pochodnych cząstkowych funkcji celu f po poszczególnych zmiennych.

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Przykład:
- Wyznacz ekstrema lokalne

$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y$$

- Obliczamy pierwsze pochodne cząstkowe:

$$f_x = 6x^2 - 6$$

$$f_y = 3y^2 - 12$$

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

$$6x^2 - 6 = 0$$

$$3y^2 - 12 = 0$$

- Czyli:
- x = 1 lub x = -1
- y = 2 lub y = -2

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Otrzymujemy cztery punkty stacjonarne:

$$P_1(1,2)$$
$$P_2(1,-2)$$
$$P_3(-1,2)$$
$$P_4(-1,-2)$$

- W punktach tych mogą znajdować się ekstrema lokalne.

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Następnie liczymy drugie pochodne cząstkowe:

$$f_{xx} = 12x$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = 0$$

$$f_{yy} = 6y$$

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Budujemy macierz drugich pochodnych:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

- Czyli:

$$\begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Sprawdzamy wyznaczniki macierzy dla kolejnych punktów stacjonarnych:
- P_1

$$\det = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144$$

- Dodatni wyznacznik oznacza istnienie ekstremum lokalnego w punkcie P_1
- Następnie liczymy minory (znak dodatni oznacza istnienie minimum, ujemny maksimum)

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- W naszym przykładzie minory są dodatnie, co oznacza, że w punkcie P_1 mamy minimum lokalne

$$f(1,2) = 2 + 8 - 6 - 24 = -20$$

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Dla punktu $P_2(1,-2)$

$$\det = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -144$$

- Ujemny wyznacznik oznacza brak ekstremum lokalnego w tym punkcie.

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Dla punktu $P_3(-1,2)$

$$\det = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -144$$

- Ujemny wyznacznik oznacza brak ekstremum lokalnego w tym punkcie.

Szukanie ekstremum bezwarunkowego

- Dla punktu $P_4(-1,-2)$

$$\det = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144$$

- Minory ujemne czyli jest maksimum

Funkcja Lagrange'a

- Funkcja Lagrange'a L wiąże funkcję celu f z funkcjami ograniczeń g_i , dzięki użyciu wektora tak zwanych nieoznaczonych mnożników Lagrange'a (λ)

$$L(x;\lambda) = f(x) + \lambda g$$

Funkcja Lagrange'a

- Dzięki wprowadzeniu funkcji L można zastąpić poszukiwania optymalnej warunkowej wartości funkcji celu f , poszukiwaniami odpowiadającej jej bezwarunkowej wartości optymalnej funkcji L .

Rozwiązanie optymalne

- Rozwiązanie optymalne otrzymuje sie rozwiazując następujący układ równań, zawierający n + r równań (n – liczba zmiennych decyzyjnych, r - liczba funkcji ograniczeń g_i):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Metoda mnożników Lagrange'a

- W celu przekształcenia równań w nierówności, wprowadza się zmienne bilansujące, tzw. zmienne nieistotne u^2

$$x_1 + x_2 \leq 10 \rightarrow x_1 + x_2 + u^2 = 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 10 \rightarrow x_1 + x_2 - u^2 = 10$$

- Rozwiązanie optymalne

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

Metoda mnożników Lagrange'a

- Twierdzenie Kuhna-Tuckera

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \longrightarrow \min$$

$$g_i((x_1, x_2, \dots x_n)) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g$$

Warunki Kuhna-Tuckera

$$\frac{\partial L}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} x = 0, \quad g(x) = 0, \quad g\lambda = 0, \quad x \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Metoda mnożników Lagrange'a

- Twierdzenie Kuhna-Tuckera

Oznaczenia:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \nu, \qquad g(x) = w$$

Zmodyfikowane warunki Kuhna-Tuckera

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \nu = 0, \quad \nu x = 0, \quad g(x) + w = 0, \quad w\lambda = 0, \quad x \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Metoda mnożników Lagrange'a

- **Rozwiązanie optymalne** można uzyskać rozpatrując wszystkie możliwe (spełniające ograniczenia) kombinacje wartości składowych wektorów: v, λ oraz w.
- W tym celu należy rozwiązać poszczególne układy równań, wynikające z warunków Kuhna-Tuckera.

Modelowanie całkowitoliczbowe

- W modelach programowania matematycznego zmiennych całkowitoliczbowych używa się m.in.:
  - Do reprezentowania wielkości, które w swej naturze są całkowitoliczbowe, np. liczba produkowanych samochodów, samolotów, liczba budowanych domów, liczba zatrudnionych pracowników itp.

Modelowanie całkowitoliczbowe

- Do modelowania zmiennych decyzyjnych służących do wyboru decyzji ze zbioru możliwych decyzji. Są to najczęściej zmienne binarne. Np.

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{należy zbudować magazyn} \\ 0 & \text{nie budujemy} \end{cases}$$

lub też

$$\gamma = \begin{cases} 0 \geq 0 & \text{nic nie budujemy} \\ 1 & \text{należy zbudować magazyn A} \\ 2 & \text{należy zbudować magazyn A} \end{cases}$$

Modelowanie całkowitoliczbowe

- Do wyrażenia pewnych stanów zmiennych ciągłych w modelach liniowych. Są to binarne zmienne wskaźnikowe.
- Do modelowania warunków logicznych w rzeczywistych zagadnieniach.
- Do modelowania niektórych nieliniowych zależności.

Zmienne wskaźnikowe

δ – zmienna wskaźnikowa związaną ze zmienną ciągłą x to zmienna binarna, której celem jest rozróżnienie pomiędzy stanem zmiennej $x =$, a stanem $x > 0$.

Zmienne wskaźnikowe

Przykład. (Problem stałych kosztów).
Niech x będzie ilością wytwarzanego produktu po kosztach jednostkowych C_1, a stałe koszty produkcji niech wynoszą C_2.
Całkowity koszt K_c wynosi zatem:

$$K_c = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = 0 \\ C_1 x + C_2 & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$$

Koszt całkowity K_c nie jest funkcją liniową. Wprowadzając zmienną wskaźnikową δ taką, że $x > 0 \Rightarrow \delta = 1$ otrzymujemy liniową funkcje celu

$$K_c(x) = C_1 x + C_2 \delta$$

Koniec