

Elementy Modelowania Matematycznego

Wykład 11

Teoria gier



Spis treści

- ◆ Wstęp
- ◆ Postać ekstensywna
- ◆ Strategie
- ◆ Postać normalna
- ◆ Równowaga Nasha

Wstęp

- ◆ W sporcie i grach towarzyskich najczęściej mamy do czynienia z bezpośrednią konfrontacją interesów (ktoś wygrywa, a ktoś przegrywa).
- ◆ Jednak jest wiele sytuacji dotyczących wzajemnych zależności nie pasujących do tego schematu. Faktycznie większość sytuacji zawiera zarówno elementy konfliktu, jak też elementy możliwej kooperacji albo kombinację obu tych elementów.

Wstęp

- ◆ Weźmy pod uwagę firmę, w której dwaj szefowie współpracują nad wytworzeniem nowego produktu.
- ◆ Ich indywidualne działania mogą wpłynąć na dochody każdego z nich, a więc mamy do czynienia z sytuacją wzajemnej zależności.
- ◆ Czy jednak musi tu być wygrany i przegrany?

Wstęp

- ◆ Można sobie wyobrazić wynik, przy którym obaj szefowie w pewnym stopniu 'wygrywają' albo 'przegrywają'.
- ◆ Prawdopodobnie, gdyby obaj szefowie współpracowali ze sobą nad wytworzeniem nowego produktu, to mogliby skorzystać z efektów realizacji projektu.
- ◆ Ale również możliwe jest, że każdy z szefów będzie chciał zaangażować w projekt mniej wysiłku niż chciałby tego drugi.

Wstęp

- ◆ Innym przykładem obejmującym elementy konfliktu i kooperacji to problem zawarcia porozumienia pomiędzy pracownikiem a pracodawcą.
- ◆ Może tu zająć konieczność zawarcia układu płacowego przed rozpoczęciem produkcji pewnego towaru.
- ◆ Chociaż interesy obu stron mogą się różnić w kwestii wynagrodzenia pracownika, jednak ich interesy mogą okazać się zgodne z innego punktu widzenia.

Wstęp

- ◆ Obie strony mogą na przykład życzyć sobie, żeby kontrakt obejmował premię dla pracownika w przypadku jego wyjątkowych wyników, gdyż wtedy premia będzie stanowiła dla pracownika właściwy bodziec do wytworzenia zysku, który obie strony będą mogły podzielić między siebie w dowolny sposób.

Wstęp

- ◆ Możemy tu rozpoznać temat 'powiększania tortu' z popularnych książek o negocjacjach dla czytelników interesujących się zarządzaniem.
- ◆ Jest to jednak także dobry przykład, w jaki sposób kwestie konfliktu i kooperacji jednocześnie wynikają w różnych sytuacjach.

Wstęp

- ◆ Gry mogą być opisane matematycznie na wiele sposobów, ale wszystkie reprezentacje mają następujące wspólne elementy formalne:
 1. lista graczy,
 2. kompletny opis tego, co gracze mogą zrobić (ich możliwe akcje),
 3. opis tego, co gracze wiedzą, kiedy mają podjąć decyzję,
 4. opis tego, w jaki sposób akcje graczy prowadzą do wyników
 5. specyfikacja preferencji graczy względem możliwych wyników.

Wstęp

- ◆ Na niskim poziomie abstrakcji matematyczna reprezentacja gry przypomina opis gier towarzyskich.
- ◆ Na przykład, reguły gry planszowej w szachy określają dokładnie elementy od 1 do 4:

Wstęp

- ◆ jest dwóch graczy
- ◆ gracze na przemian przesuwają na szachownicy figury i pionki zgodnie z regułami określającymi, jakie posunięcia można wykonać w każdej konfiguracji na szachownicy;
- ◆ gracze poznają nawzajem swoje posunięcia, a więc każdy z nich poznaje całą historię gry w miarę jej przebiegu;
- ◆ gracz, który osaczy króla drugiego gracza wygrywa grę;
- ◆ W pewnych sytuacjach gra kończy się remisem.
- ◆ Chociaż element 5 nie wynika bezpośrednio z reguł gry, jednak na ogół przyjmuje się, że gracze wolą zwycięstwo od remisu, a remis od przegranej.

Postać ekstensywna

- ◆ Przykład: konflikt dwu firm Studio Disneya i Dreamwork SKG w sprawie produkcji bliźniaczych filmów animowanych o mrówkach.
- ◆ W firmie Dreamwork SKG produkcją tego filmu kierował Jeffrey Katzenberg, który przedtem z powodu konfliktu opuścił Studio Disneya, kiedy tylko rozmawiano o możliwości produkcji takiego filmu.
- ◆ Pojawiły się więc podejrzenia, że Katzeberg ukradł pomysł.
- ◆ W Studio Disneya produkcją filmu o mrówkach kierował Michael Eisner.
- ◆ Pomyślmy o tej historii jak o grze między Katzenbergiem a Eisnerem, którzy w proponowanym modelu będą graczami.

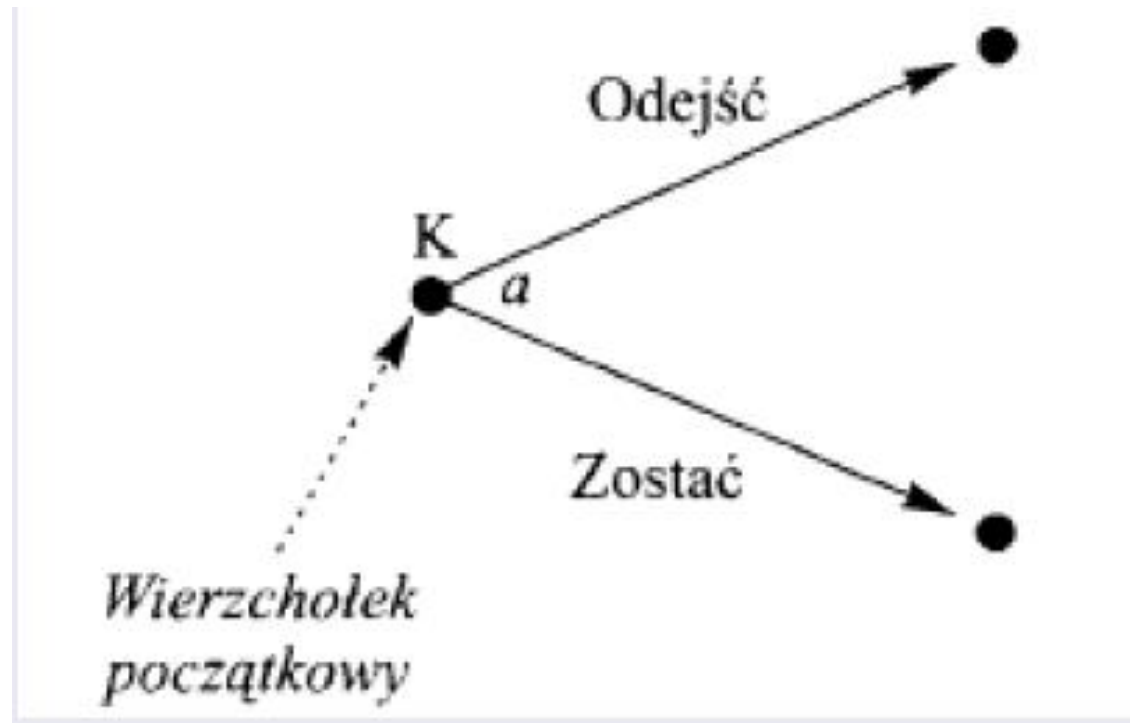
Postać ekstensywna

- ◆ Przyjmijmy, że gra zaczyna się od decyzji Katzenterga, czy zrezygnować z pracy dla Disneya.
- ◆ Wierzchołek a na rys. 1 wskazuje miejsce w grze odpowiadające tej decyzji. Ponieważ ta decyzja rozpoczyna grę, a nazywa się wierzchołkiem początkowym.
- ◆ Każda gra w postaci ekstensywnej ma dokładnie jeden wierzchołek początkowy.
- ◆ Dwie opcje Katzenterga - zostać czy odejść odpowiadają dwóm krawędziom, narysowanym jako strzałki wychodzące z wierzchołka a

Postać ekstensywna

- ◆ Zauważmy, że krawędzie mają swoje nazwy, a wierzchołek a jest oznaczony inicjałem Katzenterga, że to on wykonuje posunięcie w grze.
- ◆ Te krawędzie prowadzą od wierzchołka a do dwóch innych wierzchołków.

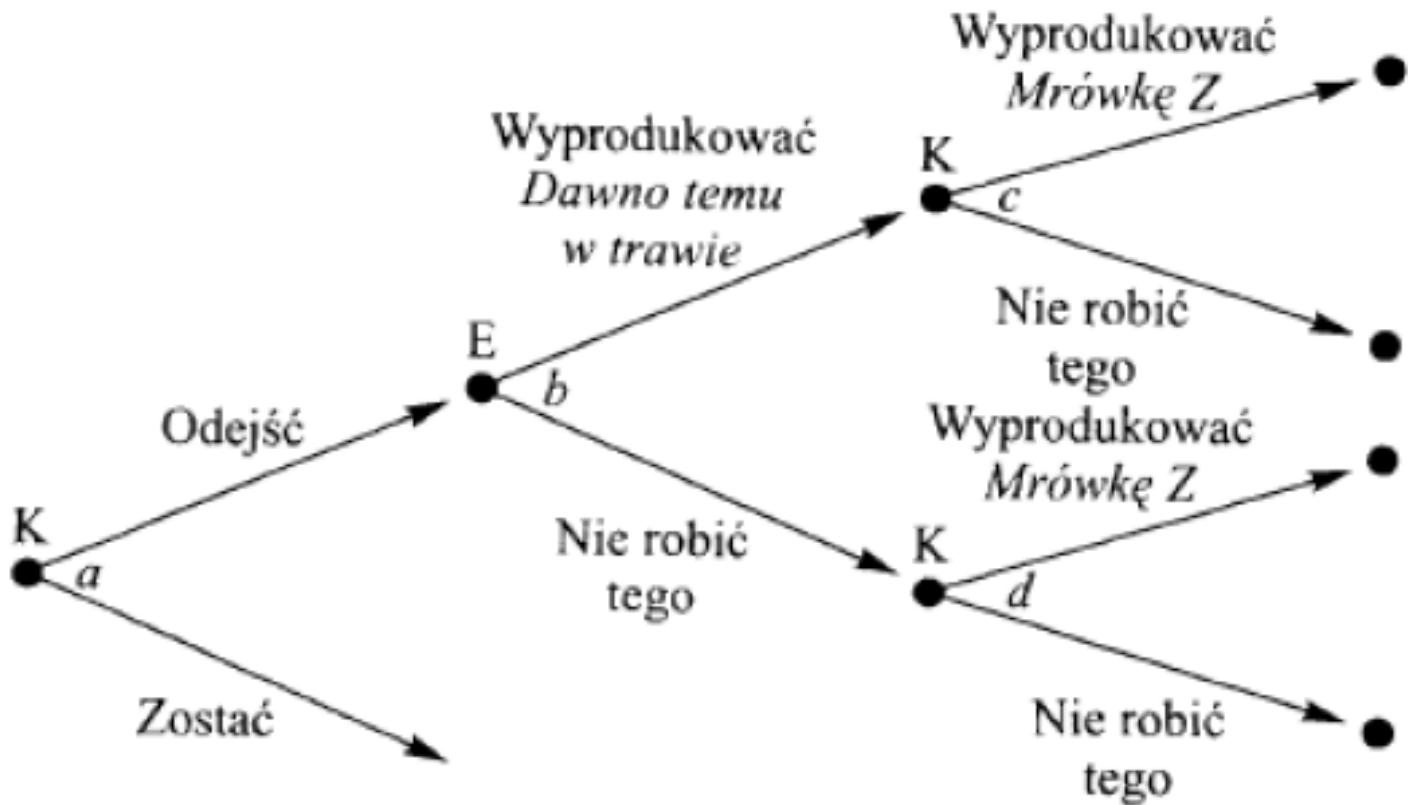
Postać ekstensywna



Postać ekstensywna

- ◆ Jeżeli Katzenberg odejdzie, to zostaną podjęte dalsze decyzje.
- ◆ Najpierw Eisner musi zdecydować, czy podjąć produkcję - wierzchołek b na rys. 2.

Postać ekstensywna



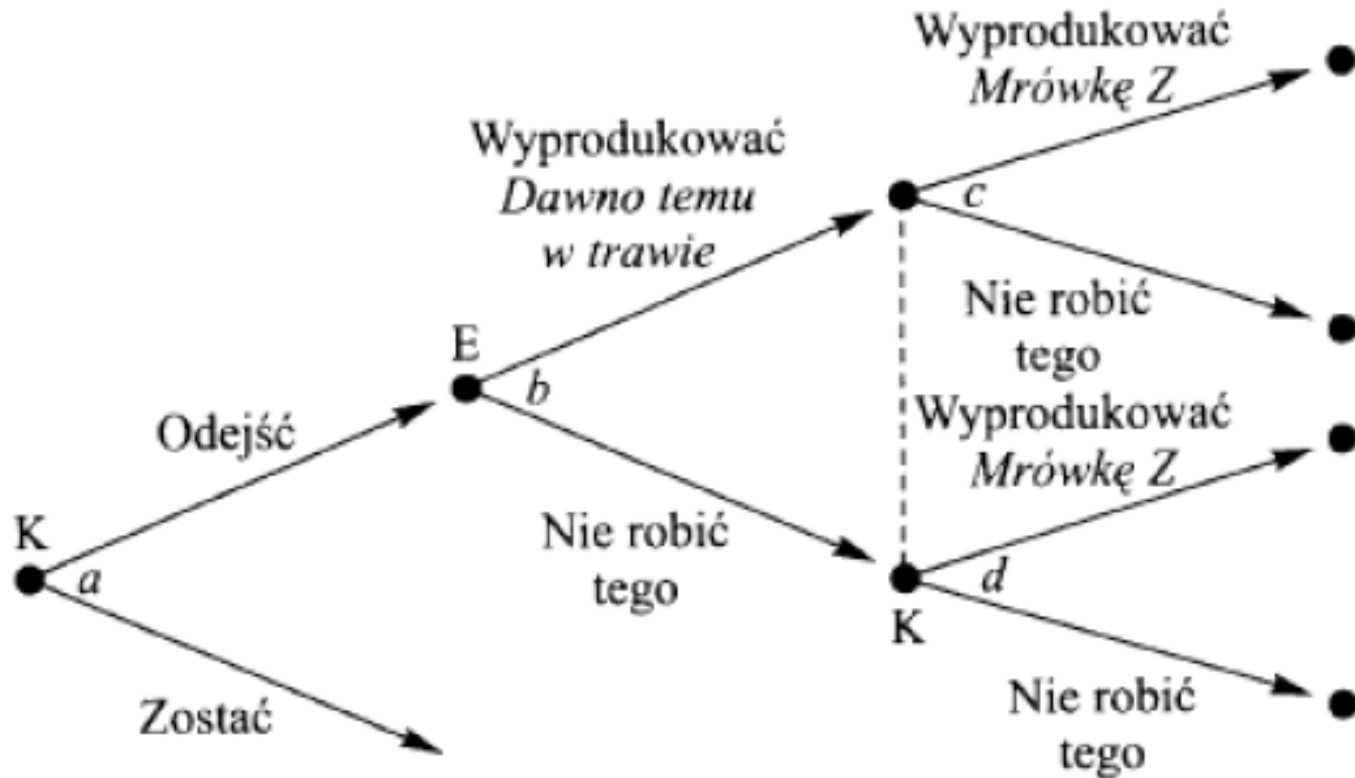
Postać ekstensywna

- ◆ Po decyzji Eisnera czy podjąć produkcję Dawno temu w trawie,
- ◆ Katzenberg musi zdecydować, czy będzie produkował Mrówkę
- ◆ (wierzchołki c lub d na rys. 2).

Postać ekstensywna

- ◆ Czy to drzewo dobrze opisuje sytuację, jaką mają gracze podejmując działania?
- ◆ W modelu ekstensywnym gracze wiedzą gdzie się znajdują, ale nie wiedzą jaką decyzję podejmie przeciwnik, wiedzą o swoich wzajemnych posunięciach po niewczasie.
- ◆ Na rys. 3 uchwycono ten brak informacji za pomocą przerywanej kreski łączącej wierzchołki c i d.

Postać ekstensywna



Postać ekstensywna

- ◆ Jeżeli obaj gracze zdecydują się na produkcję swoich filmów, to Katzenberg musi podjąć jeszcze inną decyzję:
- ◆ czy i kiedy rozpowszechniać Mrówkę, żeby wygrać z konkurencją?

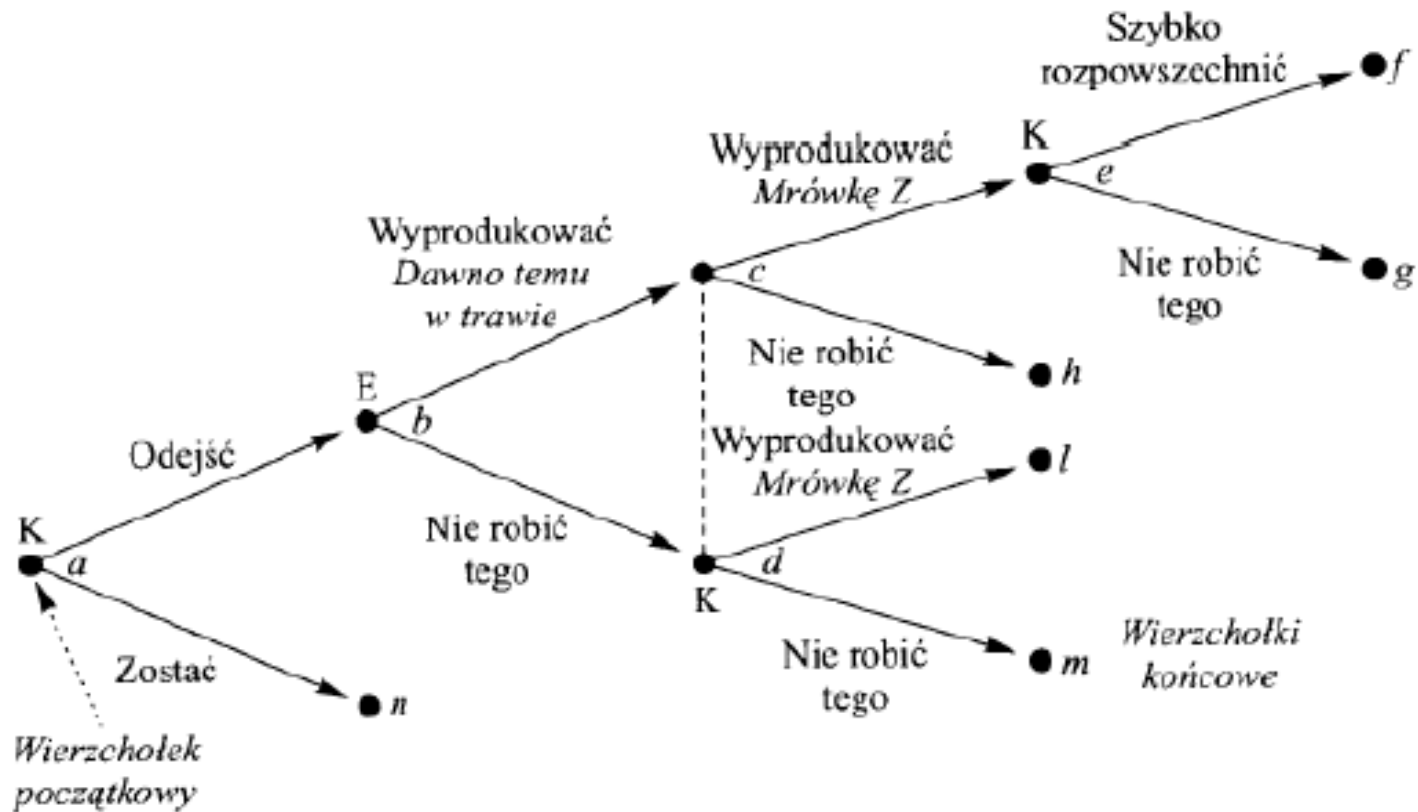
Postać ekstensywna

- ◆ Uzupełniając drzewo o tę decyzję, otrzymujemy rys. 4.
- ◆ Katzenberg ma dokonać wyboru w wierzchołku e kiedy już wie, że Eisner zdecydował się wyprodukować Dawno temu w trawie.

Postać ekstensywna

- ◆ Na rysunku 4 przedstawiono wszystkie akcje graczy oraz informację w grze.
- ◆ Wierzchołki (a; b; c; d e) nazywają się wierzchołkami decyzyjnymi, bo gracze podejmują decyzje w tych miejscach gry.
- ◆ Pozostałe wierzchołki (f ; g; h; l ; m; n) nazywają się wierzchołkami końcowymi;
- ◆ odpowiadają one wynikom gry - miejscom, w których gra się kończy.

Postać ekstensywna



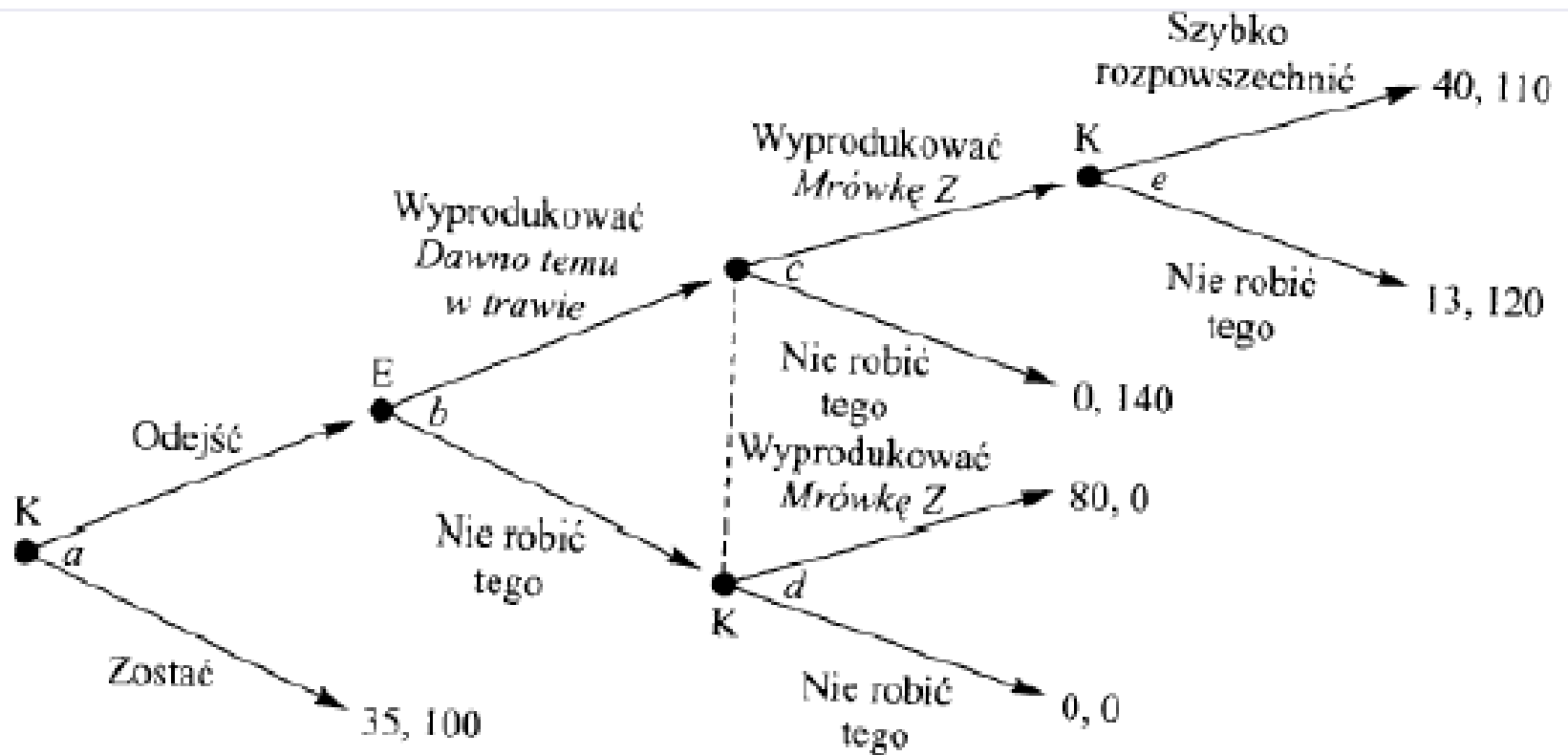
Postać ekstensywna

- ◆ W wielu grach ekonomicznych sensownie jest przyjąć, że graczom zależy na zyskach, a więc Katzenbergowi i Eisnerowi też.

Postać ekstensywna

- ◆ Przyjmijmy, że gdyby Katzenberg został u Disneya, to dostałby 35 milionów dolarów, a Eisner - 100 milionów dolarów,
- ◆ Czyli wierzchołek z wypłatą kończąca grę ma wartość (35, 100).
- ◆ Konwencja: na pierwszym miejscu wypłata dla gracza rozpoczynającego grę.
- ◆ Wyniki pokazano na rys.

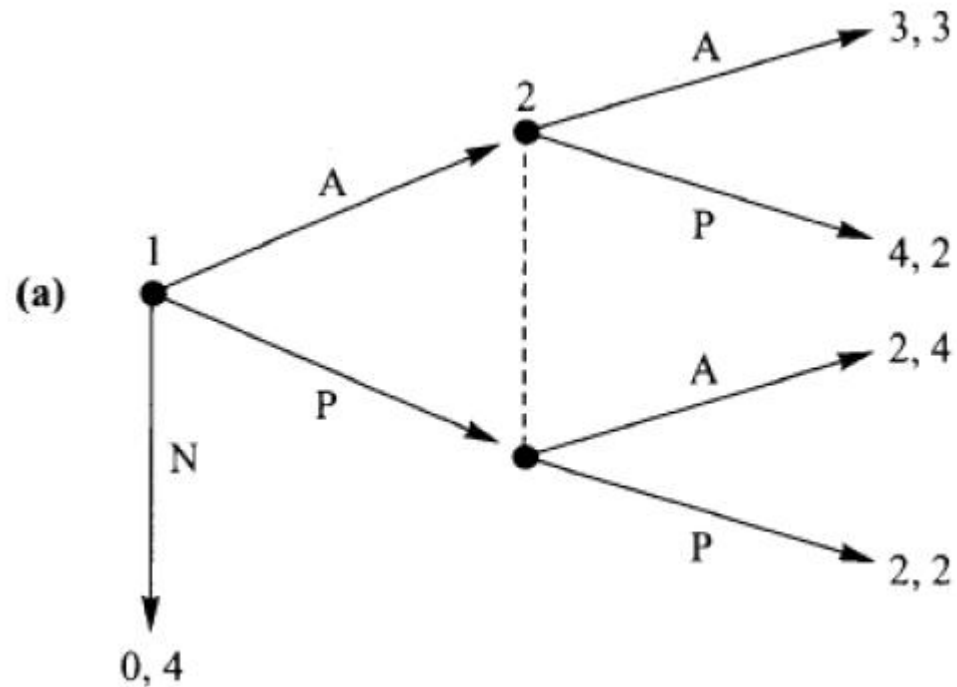
Postać ekstensywna



Strategie

- ◆ **Strategia to kompletny plan działania gracza, uwzględniający wszystkie możliwe sytuacje.**
- ◆ Najprostszym sposobem zapisania strategii jest zapisanie ciągu etykiet (nazw) odpowiadających akcjom wybranym w poszczególnych zbiorach informacyjnych.

Strategie – postać ekstensywna



Strategie – postać ekstensywna

- ◆ W grze na kolejnym rys. gracz 1 decyduje się wejść (W) albo nie wchodzić (N).
- ◆ Jeżeli wybierze N, to gra się kończy, a wektorem wypłat jest (2; 2).
- ◆ Jeżeli wybierze W, to teraz gracz 2 staje przed takim samym wyborem. Jeżeli gracz 2 wybierze N, to gra kończy się z wektorem wypłat (1; 3).

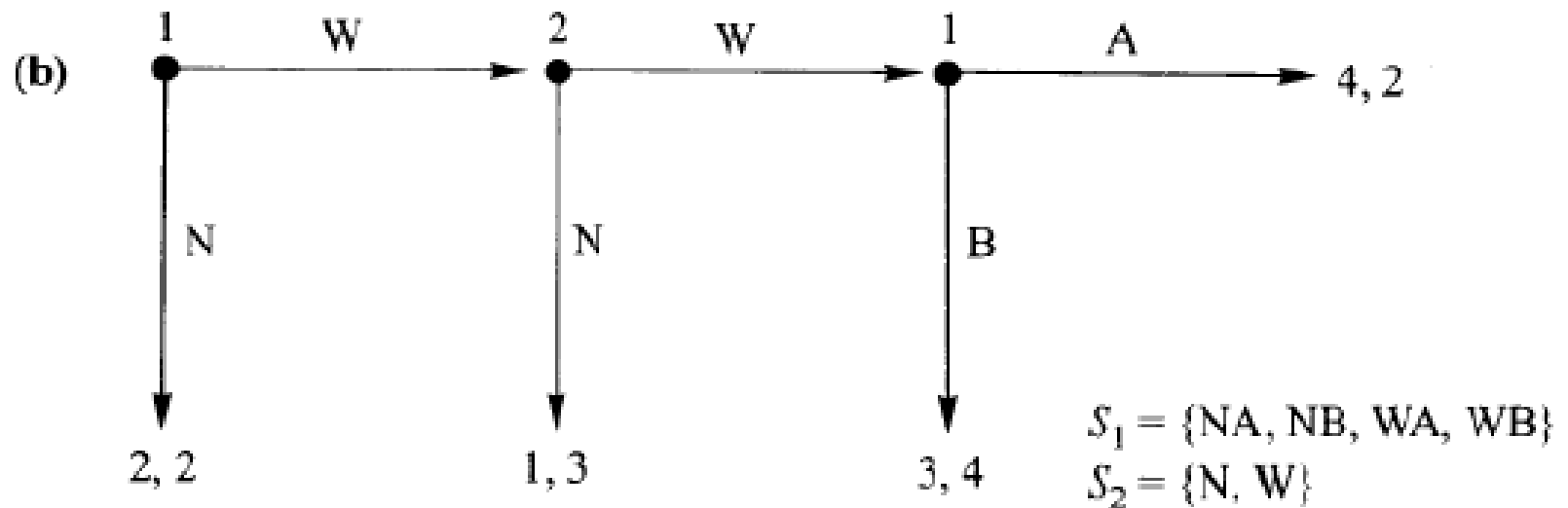
Strategie – postać ekstensywna

- ◆ Jeżeli wybierze W, to gracz 1 ma jeszcze jeden wybór, między A a B (gra kończy się wtedy z wypłatami, odpowiednio $(4; 2)$ i $(3; 4)$).
- ◆ Gracz 1 ma dwa zbiory informacyjne, a gracz 2 jeden.

Strategie – postać ekstensywna

- ◆ Zwróćmy uwagę, że w tej grze strategia gracza 1 określa, co zrobić na początku gry oraz jaką podjąć akcję w drugim zbiorze informacyjnym.
- ◆ Tak więc gracz 1 ma cztery strategie:
 - NA; NB; WA; WB

Strategie – postać ekstensywna



Strategie – postać ekstensywna

- ◆ Postać ekstensywna to bezpośredni sposób przedstawienia gry.
- ◆ Inny sposób formalnej reprezentacji gier opiera się na pojęciu strategii.
- ◆ Taka alternatywna reprezentacja jest bardziej zwarta niż reprezentacja ekstensywna i w pewnych sytuacjach lepiej się nią posłużyć.

Postać normalna

- ◆ Kiedy już przedstawimy pojęcia racjonalności w grach, staną się widoczne subtelne różnice między tymi dwoma sposobami reprezentacji gier.
- ◆ W grze w postaci ekstensywnej określa się przestrzenie strategii graczy, a każdy profil strategii graczy wyznacza pewien konkretny przebieg gry.

Postać normalna

- ◆ Znaczy to, że każdy profil strategii informuje nas o przebytej wzdłuż drzewa ścieżce
- ◆ albo, równoważnie, o wierzchołku końcowym, w którym gra się skończy.

Postać normalna

- ◆ Z każdym wierzchołkiem końcowym (który możemy nazwać wynikiem gry) jest związany wektor wypłat poszczególnych graczy.
- ◆ Stwierdzamy więc, że każdy profil strategii jednoznacznie wyznacza wektor wypłat.

Postać normalna

- ◆ Dla każdego gracza i definiujemy funkcję:

$$u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

- ◆ której dziedziną jest zbiór profilów strategii i której wartościami są liczby rzeczywiste, w taki sposób, że dla każdego wybranego przez gracza profilu strategii

$$s \in S, u_i(s)$$

- ◆ oznacza wypłatę gracza i w tej grze.
- ◆ Funkcję u_i nazywa się funkcją wypłaty gracza i .

Postać normalna

- ◆ Rozpatrzmy na przykład grę przedstawioną na poprzednim rys.
- ◆ Zbiorem profilów strategii graczy w tej grze jest
- ◆ $S = \{(NA;N); (NA;W); (NB;N); (NB;W); (WA;N); (WA;W); (WBN); (WB;W)\}$

Postać normalna

- ◆ Funkcja wypłaty u_i gracza i jest zdefiniowana na zbiorze S , a więc $u_i(s)$ to wypłata gracza i , kiedy zostanie wybrany profil strategii s .

Postać normalna

- ◆ Najprostszy sposób, żeby zobaczyć, jak deniuje się u_i to przejść przez drzewo od wierzchołka początkowego w sposób wyznaczony przez profil strategii.
- ◆ Przykładowo: $u_1(\text{NA};\text{N}) = 2$,
- ◆ $u_1(\text{WA};\text{W}) = 4$, $u_2(\text{WA};\text{N}) = 3$ itd.

Strategia dominująca i zdominowana

- ◆ **Strategia dominująca**
- ◆ najlepsza ze wszystkich możliwych strategii, niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz
- ◆ **Strategia zdominowana**
- ◆ to strategia, względem której istnieje inna strategia, która jest zawsze lepsza, niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz - takich strategii może być wiele

Strategia słabo-mocno - dominująca

- ◆ Istnieją sytuacje, gdy jakaś strategia nie jest strategią dominującą, a jednocześnie pozwala na osiągnięcie graczowi najwyższych wypłat, niezależnie od decyzji, jaką podjął przeciwnik.

Strategia słabo-mocno - dominująca

- ◆ Strategie dominujące
 - mocno dominujące
 - słabo dominujące - nie istnieje strategia lepsza przy dowolnej decyzji, jaką podjąłby drugi gracz
- ◆ Strategie zdominowane
 - mocno
 - słabo - istnieje(a) strategia(e), która(e) jest(są) zawsze niegorsza(e), niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz

Postać normalna

- ◆ Wygodnym sposobem opisu przestrzeni strategii graczy i ich funkcji wypłat w grze dwuosobowej, w której każdy gracz ma skończoną liczbę strategii, jest przedstawienie ich w postaci macierzy.
- ◆ Każdy wiersz macierzy odpowiada strategii gracza 1, a każda kolumna odpowiada strategii gracza 2.

Postać normalna

- ◆ Każda klatka w macierzy odpowiada pewnemu profilowi strategii.
- ◆ W tym miejscu wpisujemy wektor wypłat związany z tym profilem strategii.
- ◆ Na przykład gra z poprzedniego rys. została przedstawiona za pomocą macierzy.
- ◆ W reprezentacji macierzowej stosujemy zasadę uwzględniania najpierw wypłat gracza 1.

Postać normalna

		2	
		W	N
1	NA	2, 2	2, 2
	NB	2, 2	2, 2
	WA	4, 2	1, 3
	WB	3, 4	1, 3

Postać normalna

- ◆ **Gry klasyczne**
- ◆ Orzeł i reszka: gracze jednocześnie i niezależnie od siebie wybierają 'orła' albo 'reszkę', pokazując monetę na swojej ręce.
- ◆ Jeżeli ich wybór jest zgodny, to gracz 2 musi oddać swoją monetę graczowi 1;
- ◆ w przeciwnym wypadku gracz 1 oddaje swoją monetę graczowi 2.

Postać normalna

- ◆ **Dylemat więźnia:**
- ◆ władze pochwyciły dwóch przestępców, o których wiadomo, że popełnili określoną zbrodnię.
- ◆ Władze mają jednak tylko dowody wystarczające na skazanie ich za mniejsze wykroczenie.

Postać normalna

- ◆ Jeżeli żaden podejrzany nie przyzna się do winy, to obaj zostaną skazani za to mniejsze wykroczenie i zapłacą niewielką grzywnę.
- ◆ Władze umieściły więźniów w oddzielnych celach i każdemu z nich proponują doniesienie na drugiego.
- ◆ Doniesienie odpowiada strategii P (przyznać się), a odmowa odpowiada strategii N (nie przyznać się), czyli współpracować z drugim więźniem.

Postać normalna

- ◆ Każdemu z więźniów powiedziano, że jeśli się przyzna, to zostanie zwolniony, jednak jego zeznanie zostanie wykorzystane do skazania drugiego więźnia za zbrodnię.
- ◆ Jeżeli obaj więźniowie doniosą na siebie nawzajem, to zostaną skazani na więzienie, ale ze względu na fakt współpracy z wymiarem sprawiedliwości ich wyrok będzie zmniejszony.

Postać normalna

- ◆ Więzień znajdzie się w najlepszej sytuacji, kiedy przyzna się, a jego współnik nie (wypłata 3);
- ◆ kolejna wypłata (2) zostanie dokonana, kiedy żaden więzień się nie przyzna;
- ◆ potem mamy wypłaty w sytuacji, kiedy obaj więźniowie doniosą nawzajem na siebie (wypłata 1);
- ◆ najgorsza jest sytuacja więźnia, który się nie przyzna, podczas gdy drugi doniesie na niego.

Postać normalna

- ◆ **Walka płci:**
- ◆ gra dotyczy właściwie dwojga przyjaciół, którzy chcą wspólnie obejrzeć film albo iść do opery.
- ◆ Niestety, pracują oni w odległych dzielnicach miasta i z powodu awarii sieci telefonicznej nie mogą się ze sobą skomunikować.
- ◆ Muszą jednak jednocześnie i niezależnie od siebie wybrać imprezę, na którą każde z nich pójdzie.

Postać normalna

- ◆ Jest tylko jedno kino i jedna opera, więc przyjaciele spotkają się, jeżeli uda im się skoordynować swoje decyzje.
- ◆ Przyjaciele chcieliby być razem bez względu na to, czy będzie to kino, czy opera,
- ◆ Jednak gracz 1 woli operę a gracz 2 woli kino.

Postać normalna

		2	
		O	R
1	O	1, -1	-1, 1
	R	-1, 1	1, -1

Orzeł i reszka

		2	
		N	P
1	N	2, 2	0, 3
	P	3, 0	1, 1

Dylemat więźnia

		2	
		Opera	Kino
1	Opera	2, 1	0, 0
	Kino	0, 0	1, 2

Walka płci

Równowaga Nasha

- ◆ **Zachowanie racjonalne**
- ◆ Mijanie się na chodniku:
 - ustąpić
 - nie ustąpić
 - zachować się zgodnie z obowiązującą kulturą

Równowaga Nasha

- ◆ Gra ominięcie przechodnia na chodniku jest faktycznie rozgrywana w społeczeństwie codziennie, a historyczny precedens pomógł uporządkować nasze oczekiwania i zachowanie.
- ◆ Na ogół, żeby uniknąć kolizji, ludzie schodzą na prawo.
- ◆ Trudno powiedzieć, jak do tego doszło: może jest to wynik losowych prób.

Równowaga Nasha

- ◆ Niezależnie od przyczyn, ludzie zaczęli oczekiwać, że inni w celu uniknięcia kolizji, będą schodzić na prawo.
- ◆ Jest to konwencja społeczna, obowiązująca w tym większym stopniu, im bardziej ludzie się do niej stosują.

Równowaga Nasha

- ◆ Historia, zasady i komunikacja są równie przydatne w koordynacji przypuszczeń i zachowań w sytuacjach ekonomicznych, jak w grze omijania przechodniów na chodniku.
- ◆ Firmy, które konkurują ze sobą przez dłuższy czas często wpadają w rutynę, przy której dyrektor każdej firmy nauczył się już dokładnie przewidywać, jakie strategie będą stosowane przez jego konkurentów w poszczególnych tygodniach.

Równowaga Nasha

- ◆ Partnerzy biznesowi, którzy współpracują od dawna nad podobnymi projektami uczą się, czego można się nawzajem po sobie spodziewać.
- ◆ Mogą się też komunikować i w ten sposób koordynować swoje działania.

Równowaga Nasha

- ◆ Idea analizy racjonalnego zachowania polega na tym, że działanie pewnych sił społecznych wpływa na **koordynację** albo **kongruencję** zachowania w grze.
- ◆ Kongruencja odnosi się do konsekwentnych zachowań w grze, która jest rozgrywana w pewnym społeczeństwie od dawna albo jest rozgrywana przez te same strony, które wielokrotnie ją powtarzają.

Równowaga Nasha

- ◆ Gra jest wielokrotnie rozgrywana w pewnej społeczności albo przez jakąś grupę zainteresowanych osób.
- ◆ Postępowanie graczy 'utrwała' zwyczaj, że te same strategie są używane w kolejnych partiach gry.

Równowaga Nasha

- ◆ Gracze spotykają się przed rozegraniem gry i porozumiewają się co do strategii, jakich będą używać.
- ◆ W dalszym ciągu wszyscy gracze przestrzegają tego porozumienia.

Równowaga Nasha

- ◆ Zewnętrzny mediator zaleca graczom zastosowanie w grze konkretnego profilu strategii.
- ◆ Każdy gracz, jeżeli uwierzy, że inni zastosują się do sugestii mediatora, będzie również miał powody, żeby się do nich zastosować.

Równowaga Nasha

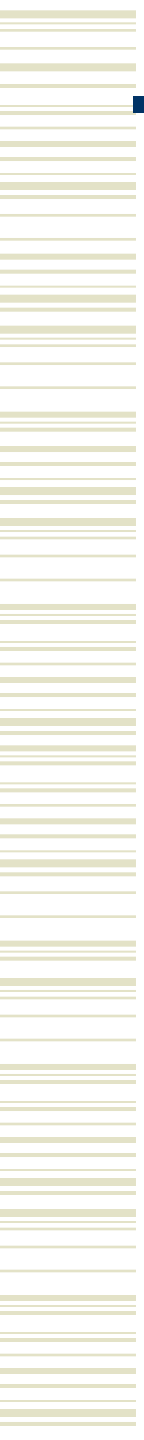
- ◆ Równowaga Nasha
- ◆ (zwana po prostu równowagą) to takie pary strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem.

Równowaga Nasha

- ◆ Gdy w grze zostanie osiągnięta równowaga Nasha, żaden z graczy nie może poprawić swojego wyniku poprzez jednostronną zmianę wybranej strategii.

Równowaga Nasha

- ◆ W jednej grze może być kilka równowag Nasha.
- ◆ W równowadze Nasha wybór przez jednego z graczy danej strategii jest najlepszą odpowiedzią na strategię drugiego gracza i na odwrót, strategia drugiego gracza jest najlepszą odpowiedzią na strategię pierwszego gracza



Koniec