KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

$$\boldsymbol{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(B)\neq 0}$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZAJŚCIA ZDARZENIA A POD WARUNKIEM, ŻE ZASZŁO ZDARZENIE B

NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

WIĘC

$$\boldsymbol{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)}$$

CO OZNACZA, ŻE ZDARZENIE B NIE MA WPŁYWU NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZDARZENIA A

PERMUTACJE

KORZYSTAMY Z PERMUTACJI, JEŻELI DOKONUJEMY OPERACJI NA WSZYSTKICH ELEMENTACH ZBIORU NP.: NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA USTAWIĆ 3 KSIĄŻKI NA PÓŁCE. ODPOWIEDŹ: 3! = 1*2*3 = 6.

$$\boldsymbol{P(A)=n!}$$

GDZIE ***n*** OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU

KOMBINACJE

KORZYSTAMY Z KOMBINACJI, JEŻELI ZE ZBIORU MAMY WYBRAĆ KILKA ELEMENTÓW I ICH KOLEJNOŚĆ NIE JEST ISTOTNA NP.: NA ILE RÓŻNYCH SPOSOBÓW MOŻEMY WYBRAĆ 3 OSOBY SPOŚRÓD 7. ODPOWIEDŹ:

$$\boldsymbol{C_7^3=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}=5\cdot 7=35}$$

$$\boldsymbol{C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

GDZIE ***n*** OKREŚLA LICZEBNOŚĆ ZBIORU, A ***k*** OKREŚLA LICZBĘ LOSOWANYCH ELEMENTÓW

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Korzystamy z wariacji bez powtórzeń, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka niepowtarzalnych elementów i ich kolejność jest istotna np.: Ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z dziewięciu ponumerowanych od 1 do 9 drewnianych klocków? Odpowiedź:

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

gdzie n określa liczebność zbioru, a k określa liczbę losowanych elementów

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Korzystamy z wariacji z powtórzeniami, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka elementów, które mogą się powtarzać i ich kolejność jest istotna np.: Ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z liczb od 1 do 9? Odpowiedź:

$$W_9^4 = 9^4 = 6561$$

$$W_n^k = n^k$$

gdzie n określa liczebność zbioru, a k określa liczbę losowanych elementów

SCHEMAT BERNOULLIEGO

Korzystamy ze schematu Bernoulliego w przypadku, gdy przeprowadzamy wiele prób danego doświadczenia (np.: rzut monetą) i chcemy obliczyć prawdopodobieństwo osiągnięcia k sukcesów w n próbach np.: rzucamy 3 razy monetą – jakie jest prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie dokładnie 2 razy: $P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

n - liczba prób

k – oczekiwana liczba sukcesów

p - prawdopodobieństwo sukcesu

q - prawdopodobieństwo porażki (1-p)

1. Z okazji zjazdu koleżeńskiego spotyka się 10 osób. Ile nastąpi powitań (uścisków dłoni)?
   ODP.: szukamy wszystkich możliwych par, a więc kombinacja 2 z 10

2. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij $P(n) = n!$
   ODP.: Dla $n = 1$liczba permutacji wynosi 1, a $1! = 1$. Zakładamy, że $P(n) = n!$, więc $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1) = (n+1)!$

3. DO windy w 8-piętrowym budynku wsiadło 5 osób. Na ile różnych sposobów mogą oni opuścić windę na różnych piętrach?
   ODP.: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

4. W przedziale wagonu kolejowego ustawione są naprzeciw siebie dwie ławki. Każda z ławek posiada 5 ponumerowanych miejsc. Do wagonu wsiada 5 osób, z których 3 zajmują miejsca na jednej z ławek, a 2 pozostałe osoby usiadły na drugiej ławce, naprzeciw 2 osób z pierwszej ławki. Ile jest możliwych układów ludzi na ławkach?
   ODP.: 1 osoba ma 5 możliwości, 2 osoba ma 4 możliwości, 3 osoba ma 3 możliwości, 4 osoba ma 3 możliwości, 5 osoba ma 2 możliwości, czyli $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 360$. Dodatkowo pierwsza osoba może wybrać jedną z dwóch ławek więc ostatecznie $2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2) = 720$

5. Każdej z 4 osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:
   a. każda z osób mogła się urodzić w dowolnym dniu
      ODP.: Wariacja z powtórzeniami $W_7^4 = 7^4$
   b. każda z osób urodziła się w innym dniu tygodnia
      ODP.: Wariacja bez powtórzeń $V_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!}$

6. Z cyfr: 2, 3, 4, 5, 7 układamy liczby 5-cio cyfrowe o różnych cyfrach. Ile można ułożyć takich liczb, które:
   a. są podzielne przez 3
      ODP.: liczba jest podzielna przez 3 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, więc $5!$
   b. są podzielne przez 9
      ODP.: liczba jest podzielna przez 9 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9, więc 0
   c. są podzielne przez 4
      ODP.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc xxx32, xxx24, xxx72, xxx52 więc $4 \cdot 3!$

7. Liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo w ciąg, który potraktujmy jako liczbę 7-cyfrową (której pierwszą cyfrą nie może być 0). Ile jest możliwych takich ustawień, w których otrzymamy liczbę 7-cyfrową:
   a. dowolną
      ODP.: wszystkie możliwe oprócz zaczynających się od zera, czyli $7! - 6!$

   b. podzielną przez 4
      ODP.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52 lub 56. Dla 04, 20, 40 możemy ustawić 5 pierwszy cyfr na $5!$ sposobów. Dla reszty końcówek początkowe cyfry możemy ustawić na $4 \cdot 4!$ sposobów, ponieważ 0 nie może być pierwszą cyfrą. Ostatecznie: $3 \cdot 5! + 7 \cdot 4 \cdot 4!$

8. WYZNACZ : $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$

ODP.:

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

SKORO

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

TO

$$\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} - \frac{n!\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - \frac{n}{1} = \frac{n(n-3)}{2} = 9$$

CO DAJE

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

A WIĘC

$$n = 6$$

9. ILE JEST SPOSOBÓW USTAWIENIA W SZEREG PIĘCIU CHŁOPCÓW I CZTERECH DZIEWCZYNEK TAK, ABY:
   a. CHŁOPCY I DZIEWCZYNKI STALI NA ZMIANĘ

      ODP.: $5! \cdot 4!$
   b. PIERWSZY I DRUGI STAŁ CHŁOPIEC

      ODP.: $\binom{5}{2} \cdot 2! \cdot 7!$ PONIEWAŻ WYBIERAMY 2 CHŁOPCÓW Z 5-CIU, DAJ WYBRANI MOGĄ SIĘ USTAWIĆ NA DWA SPOSOBY, A POZOSTAŁE 7 MIEJSC TO WSZYSTKIE MOŻLIWE USTAWIENIA W OBRĘBIE POZOSTAŁYCH 7 OSÓB
   c. NAJPIERW STAŁY DZIEWCZYNKI , A NASTĘPNIE CHŁOPCY

      ODP.: $4! \cdot 5!$
   d. PIERWSZA STAŁA DZIEWCZYNKA

      ODP.: $\binom{4}{1} \cdot 8!$

10. ILE JEST LICZB TRZYCYFROWYCH:
    a. PARZYSTYCH

       ODP.: LICZBA PARZYSTA WTEDY, GDY JEJ OSTATNIA CYFRA JEST PARZYSTA LUB JEST ZEREM (2, 4, 6, 8, 0), A WIĘC: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ PONIEWAŻ NA PIERWSZYM MIEJSCU NIE WYSTĘPUJE 0
    b. PODZIELNYCH PRZEZ 5

       ODP.: OSTATNIA CYFRA MUSI BYĆ ELEMENTEM ZBIORU $\{0, 5\}$, A WIĘC $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$
    c. O TEJ SAMEJ CYFRZE SETEK I JEDNOŚCI

       ODP.: $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$
    d. WIĘKSZYCH OD 546

       ODP.: NAJPIERW OD 600 W GÓRĘ - $4 \cdot 10 \cdot 10$, POMIĘDZY 550 I 600 - $1 \cdot 5 \cdot 10$, POMIĘDZY 546 I 550 – 3, W SUMIE: $(4 \cdot 10 \cdot 10) + (1 \cdot 5 \cdot 10) + 3 = 453$
    e. MNIEJSZYCH OD 345

       ODP.: $(2 \cdot 10 \cdot 10) + (1 \cdot 4 \cdot 10) + 5 = 245$

11. OBLICZ LICZBĘ ELEMENTÓW PEWNEGO ZBIORU SKOŃCZONEGO WIEDZĄC, ŻE MA ON 79 PODZBIORÓW CO NAJWYŻEJ DWUELEMENTOWYCH.

    ODP.: n – LICZBA PODZBIORÓW JEDNOELEMENTOWYCH, $\binom{n}{2}$ - LICZBA PODZBIORÓW DWUELEMENTOWYCH, 1 PODZBIÓR PUSTY. $n + \binom{n}{2} + 1 = 79$, PO ROZWIĄZANIU WYCHODZI $n = 12 \vee n = -13$

12. Z TALII 52 KART LOSUJEMY CZTERY KARTY. ILE JEST MOŻLIWYCH WYNIKÓW LOSOWANIA, JEŚLI WŚRÓD NICH MAJĄ BYĆ CO NAJWYŻEJ TRZY KIERY?

    ODP.: WSZYSTKIE MOŻLIWOŚCI, OPRÓCZ TYCH, W KTÓRYCH WYLOSUJEMY 4 KIERY. RÓŻNICA POMIĘDZY WSZYSTKIMI KOMBINACJAMI, A TYMI Z 4 KIERAMI: $\binom{52}{4} - \binom{13}{4} = 270010$

13. W pudełku znajduje się 5 kul białych i 4 czarne. Na ile sposobów można wyjąć z pudełka 3 kule tak, aby otrzymać:
    a. 3 kule czarne
       odp.: 4
    b. 3 kule białe
       odp.: 10
    c. dwie kule białe i jedną czarną
       odp.: 40
    d. Co najmniej jedna kulę białą
       odp.: zero kul białych – 4, wszystkie możliwości - $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$, więc 84-4 = 80

14. Używamy 32-kartowej talii, zawierającej osiem kart w czterech kolorach. Starszeństwo kart: as(A), król(K), dama(D), walet(W), dziesiątka(10), dziewiątka(9), ósemka(8), siódemka(7). Grający w jednym rozdaniu pokera otrzymują po pięć kart.
    Ile układów kart w pokerze to:
    a. full - trzy karty tej samej wysokości i dwie karty innej
       odp.: $\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{4}{2} = 1344$, ponieważ wybieramy z 8 wariantów 1 rodzaj karty, która będzie stanowiła trójkę, a następnie wybieramy 3 konkretne karty, podobnie w drugim przypadku, gdzie jest to rodzaj karty stanowiącej parę – istotna jest kolejność, bo DD888 to co innego niż 88DDD.
    b. dwie pary - dwie karty tej samej wysokości, dwie innej i ostatnia karta jeszcze innej
       odp.: $\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{24}{1} = 12096$
    c. kareta - cztery karty tej samej wysokości i jedna dowolna z pozostałych
       odp.: $\binom{8}{1} \cdot \binom{28}{1} = 224$
    d. kolor - pięć kart w jednym kolorze, ale nie wszystkie kolejno (bez pokerów)
       odp.: $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5} - 4 = 208$, ponieważ musimy odjąć 4 pokery

15. Rzucono 3 razy monetą i wypadła nieparzysta liczba orłów (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadły 3 orły (zdarzenie A)?
    odp.: $B = \{OOO, ORR, RRO, ROR\}$; $A = \{OOO\}$; $A \cap B = \{OOO\}$, więc $P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{1}{4}$

16. Rzucono 2 razy kostką do gry i w pierwszym rzucie wypadło 6 oczek (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w obu rzutach wypadnie co najmniej 10 oczek (zdarzenie A)?
    odp.:

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\};$$
$$A = \{(6,4), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)\};$$
$$A \cap B = \{(6,4), (6,5), (6,6)\}$$
$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$
$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(A|B) = \frac{1}{12} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

17. OBLICZ PRAWDOPODOBIEŃSTWO UZYSKANIA 3 SZÓSTEK W 3 RZUTACH KOSTKĄ.

ODP.: $P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{216} \cdot 1$

18. OBLICZ PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYLOSOWANIA DOKŁADNIE 1 KRÓLA Z TALI 52 KART W 5 LOSOWANIACH.

ODP.: $P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{4}{52}\right)^1 \cdot \left(\frac{48}{52}\right)^4$

19. CO JEST BARDZIEJ PRAWDOPODOBNE: UZYSKANIE 500 ORŁÓW W 1000 RZUTÓW MONETĄ, CZY UZYSKANIE 5000 ORŁÓW W 10000 RZUTÓW MONETĄ?

ODP.:

$$P_{100}(50) = \binom{100}{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100-50} \approx 0,08$$

$$P_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} \approx 0,24$$

20. GRACZ RZUCA 2 LOTKAMI DO TARCZY. PIERWSZY RZUT BYŁ LEPSZY OD DRUGIEGO. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO, ŻE 3 RZUT BĘDZIE GORSZY OD PIERWSZEGO?

ODP.: TYLKO OPCJE 1, 2 I 4 SPEŁNIAJĄ WARUNEK, ŻE RZUT 1 JEST LEPSZY NIŻ RZUT 2 (A – NAJLEPSZY, B – ŚREDNI, C – NAJGORSZY)

	OPCJA 1	OPCJA 2	OPCJA 3	OPCJA 4	OPCJA 5	OPCJA 6
RZUT 1	A	A	B	B	C	C
RZUT 2	B	C	A	C	A	B
RZUT 3	C	B	C	A	B	A

TYLKO OPCJE 1 I 2 SPEŁNIAJĄ TRZECI WARUNEK, CZYLI RZUT 3 JEST GORSZY NIŻ RZUT 1, A WIĘC PRAWDOPODOBIEŃSTWO JEST $\frac{2}{3}$

21. DWIE OSOBY GRAJĄ W ROSYJSKĄ RULETKĘ 6-STRZAŁOWYM REWOLWEREM, W KTÓRYM ZNAJDUJĄ SIĘ 3 NABOJE, ZAŁADOWANE W TRZECH SĄSIEDNICH KOMORACH. KRĘCIMY BĘBNEM, A NASTĘPNIE GRACZ A PRZYSTAWIA SOBIE REWOLWER DO GŁOWY I STRZELA, A JEŻELI PRZEŻYJE TO SAMO ROBI GRACZ B (BEZ KRĘCENIA BĘBNEM). KTÓRY GRACZ MA WIĘKSZE SZANSE NA PRZEŻYCIE? GRACZ PIERWSZY (A) CZY GRACZ DRUGI (B)?

ODP.: WIĘKSZE SZANSE NA PRZEŻYCIE MA GRACZ B $P(B) = \frac{4}{6}$

X	X	X	O	O	O	GINIE A
O	X	X	X	O	O	GINIE B
O	O	X	X	X	O	GINIE A
O	O	O	X	X	X	GINIE B
X	O	O	O	X	X	GINIE A
X	X	O	O	O	X	GINIE A

22. W URNIE X MAMY: 5 KUL BIAŁYCH, 4 CZARNE, A W URNIE Y: 3 KULE BIAŁE, 1 CZARNA. RZUCAMY SYMETRYCZNĄ KOSTKĄ. JEŻELI WYPADNIE PARZYSTA LICZBA OCZEK LOSUJEMY 1 KULĘ Z URNY X, JEŻELI NIEPARZYSTA LOSUJEMY 1 KULĘ Z URNY Y. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYLOSOWANIA KULI BIAŁEJ?

ODP.: $P(A) = \frac{1}{2}; P(A') = \frac{1}{2}; P(B_X) = \frac{5}{9}; P(B_Y) = \frac{3}{4}$ WIĘC $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{24} + \frac{9}{24} = \frac{19}{24}$

23. RZUCAMY TRZEMA KOSTKAMI. JAKIE JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO, ŻE NA ŻADNEJ KOSTCE NIE WYPADŁA SZÓSTKA, JEŚLI NA KAŻDEJ KOSTCE WYPADŁA INNA LICZBA OCZEK?

ODP.: $P = \frac{1}{2}$

Czy ważna jest kolejność występowania elementów?

- NIE → Kombinacje bez powtórzeń

  $$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

- TAK → Czy elementy mogą się powtarzać?
  - TAK → Wariacje z powtórzeniami

    $$W_n^k = n^k$$

  - NIE → Czy wszystkie elementy są wykorzystane?
    - TAK → Permutacje bez powtórzeń

      $$P_n = n!$$

    - NIE → Wariacje bez powtórzeń

      $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$