**ALGORYTM LICZENIA EKSTREMÓW WARUNKOWYCH** funkcji $f(x,y)$ przy warunku $g(x,y)$ przy użyciu metody mnożników Lagrange'a

$\lambda \in R$

1. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda * g(x,y)$

2. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \implies P_0(x_0,y_0,\lambda_0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

3. Tworzymy funkcję

$$V(x,y,\lambda) = L''_{xx} * \left(g'_y\right)^2 - 2 * L''_{xy} * g'_x * g'_y + L''_{yy} * (g'_x)^2$$

4. Obliczamy:

$$V(x_0,y_0,\lambda_0), \text{ jeśli } \begin{matrix} V(x_0,y_0,\lambda_0) > 0 \text{ to minimum} \\ V(x_0,y_0,\lambda_0) < 0 \text{ to maximum} \end{matrix} \quad ; \quad V(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \text{ to nie wiadomo}$$

**Zadanie**:

Zbadaj istnieje ekstremów warunkowych $f(x,y) = x^3 + y^3$ przy warunku $g(x,y) = x + y - 1$ metodą Lagrange'a.

1. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$L(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - \lambda(x + y - 1)$

2. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 3x^2 \\ L'_y = 3y^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 3y^2 \implies 3x^2 = 3y^2 \implies \boldsymbol{x = y} \vee \boldsymbol{x = -y} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

**1)** $x = y \implies \boldsymbol{2x - 1 = 0} \implies \boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}}, \boldsymbol{y_1 = \frac{1}{2}}, \boldsymbol{\lambda_1 = \frac{3}{4}}$

**2)** $x = -y \implies \boldsymbol{x - x - 1 = 0}$ **Sprzeczność, nie ma drugiego przypadku**

3. Tworzymy funkcję

$L''_{xx} = 6x$

$L''_{xy} = 0$

$L''_{yy} = 6y$

$g'_x = 1 \quad ; \quad g'_y = 1$

$(x,y,\lambda) = 6x * 1^2 - 2 * 0 * 1 * 1 + 6y * 1^2 = 6x + 6y$

4. Obliczamy:

$$V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{2} + \frac{6}{2} = 6 > 0 \implies minimum$$

**Zadanie**:

Zbadaj istnieje ekstremów warunkowych $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2y^2$ przy warunku $x*y=2$metodą Lagrange'a.

$\boldsymbol{g(x,y)=x*y-2}$

1. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}x^2+2y^2-\lambda*(x*y-2)$$

2. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x=x-\lambda*y=0\Longrightarrow\lambda=\dfrac{x}{y} \\ L'_y=4y-\lambda*y=0\Longrightarrow\lambda=\dfrac{4y}{x}\Longrightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{4y}{x}\Longrightarrow x^2=4y^2\Longrightarrow \boldsymbol{x=2y}\vee \boldsymbol{x=-2y} \\ x*y-2=0 \end{cases}$$

1) $\boldsymbol{2y^2-2=0}$
   $\boldsymbol{y_1=1\vee y_2=-1}$
   $\boldsymbol{x_1=2\vee x_2=-2}$
   $\boldsymbol{\lambda_1=2\vee\lambda_2=2}$
2) $\boldsymbol{-2y^2-2=0\Longrightarrow y^2=-1}$ **sprzeczność**

3. Tworzymy funkcję:

$L''_{xx}=-1$

$L''_{yy}=4$

$L''_{xy}=-\lambda$

$g'_x=y\quad;\quad g'_y=x$

$$V(x,y,\lambda)=x^2+2*(-\lambda)*x*y+4*y^2$$

4. Obliczamy:

$V(2,1,2)=4+8+4=16>0\Longrightarrow \text{minimum}$

$V(-2,1,2)=4-8+4=0\Longrightarrow \textit{nie wiadomo co}$

**Zadanie**:

Zbadaj istnieje ekstremów warunkowych $f(x,y)=x*y$ przy warunku $g(x,y)=x^2+y^2-2$ metodą Lagrange'a.

1. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y,\lambda)=x*y-\lambda*(x^2+y^2-2)$$

2. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x=y-\lambda*2x=0\Longrightarrow\lambda=\dfrac{y}{2x} \\ L'_y=x-\lambda*2y=0\Longrightarrow\lambda=\dfrac{x}{2y}\Longrightarrow\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{2y}\Longrightarrow \boldsymbol{y=x}\vee\boldsymbol{y=-x} \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases}$$

**1)** $\mathbf{2x^2 = 2}$

$\mathbf{x_1 = 1 \vee x_2 = -1}$

$\mathbf{y_1 = 1 \vee y_2 = -1}$

$\mathbf{\lambda_1 = \frac{1}{2} \vee \lambda_2 = -\frac{1}{2}}$

**2)** $\mathbf{2x^2 = 2}$

$\mathbf{x_3 = 1 \vee x_4 = -1}$

$\mathbf{y_3 = -1 \vee y_4 = 1}$

$\mathbf{\lambda_3 = -\frac{1}{2} \vee \lambda_4 = -\frac{1}{2}}$

3. Tworzymy funkcję:

$L''_{xx} = -2\lambda$

$L''_{yy} = -2\lambda$

$L''_{xy} = 1$

$g'_x = 2x \;\; ; \;\; g'_y = 2y$

$$V(x, y, \lambda) = -2\lambda * 4y^2 - 2 * 2x * 2y - 2\lambda * 4x^2 = -8\lambda * y^2 - 8xy - 8\lambda * x^2$$

3) Obliczamy:

$$V\left(1,1,\frac{1}{2}\right) = -8 * \frac{1}{2} * 1^2 - 8 * 1 * 1 - 8 * \frac{1}{2} * 1^2 = -16 < 0 \Longrightarrow \text{maximum}$$

$$V\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right) = 8 * \frac{1}{2} - 8 + 8 * \frac{1}{2} = 4 - 8 + 4 = 0 \Longrightarrow \text{nie wiadomo}$$

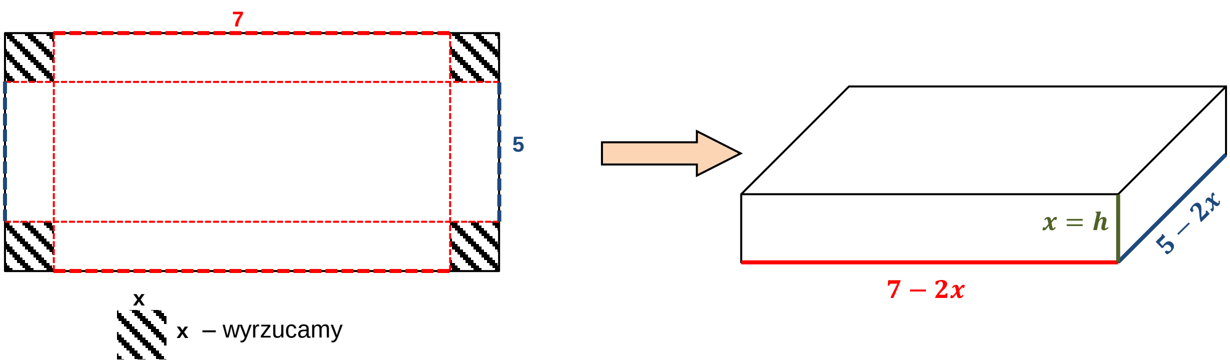
$$V\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right) = 8 * \frac{1}{2} + 8 + 4 > 0 \Longrightarrow \text{minimum}$$

$$V\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right) = 8 * \frac{1}{2} + 8 + 4 > 0 \Longrightarrow \text{minimum}$$

---

## OPTYMALIZACJA

**Zadanie**:
Dany jest prostokąt i z rogów prostokąta wycinamy kwadraty o wymiarach x. Zaginamy boki, aby stworzyć pudełko. Jakie musi być x, aby pudełko miało największą objętość?




$$V = (7 - 2x)(5 - 2x) * x = (35 - 14x - 10x + 4x^2) * x = 4x^3 - 24x^2 + 35x$$

Szukamy ekstremum powstałej funkcji

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 35 = 0$

$\Delta = 2304 - 1680 = 624 \;\; ; \;\; \sqrt{\Delta} \approx 25$

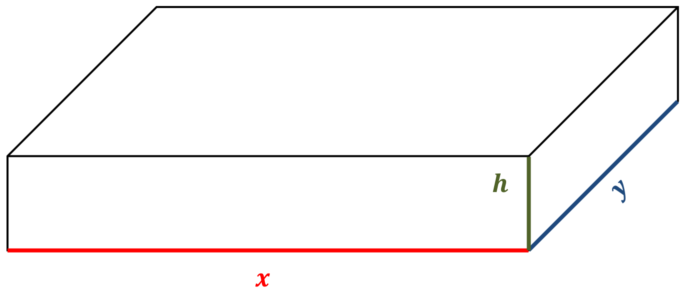
$\mathbf{x_1 = \frac{48 - 25}{24} = \frac{23}{24}} \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = \frac{48 + 25}{24} = \frac{73}{24}}$ **ZŁE**

Jaką liczbą może być x?

$$0 < x < \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \mathbf{\frac{23}{24}} < \frac{5}{2}$$

Odpowiedź: Punkt $\boldsymbol{x_1}$ jest optymalny.

**Zadanie**:
Z drutu o długości 24 zrobić szkielet prostopadłościanu o największej objętości.




$x, y, h \neq 0$

$4x + 4y + 4h = 24 \ddots\backslash 4$
$x + y + h = 6 \Longrightarrow h = 6 - x - y$

$f(x,y) = (xy) * (-x - y + 6)$

Szukamy ekstremum powstałej funkcji:
$f'(x,y) = (xy)' * (6 - x - y) + (xy) * (6 - x - y)' = 6y - xy - y^2 - xy * 6y - y^2 - 2xy$

$$\begin{cases} 6y - y^2 - 2xy = 0 \\ 6x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y(6 - y - 2x) = 0 \Longrightarrow y \neq 0 \ \wedge 6 - y - 2x + 6 = 0 \ddots * (-2) \\ x(6 - x - 2y) = 0 \Longrightarrow x \neq 0 \ \wedge 6 - x - 2y + 6 = 0 \Longrightarrow y = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x + 4y - 12 = 0 \\ -x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$
$3x - 6 = 0$
$x = 2$

**Zadanie**:
Na płaszczyźnie $3x + 2y - z = 2$ znajdź punkt (**P**), którego odległość od punktu $A(1,1,-2)$ jest najmniejsza.
$\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$
$\boldsymbol{B(x_2, y_2, z_2)}$
$\boldsymbol{|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$
$z = 3x + 2y - 2$

Punkty płaszczyzny mają współrzędne: $(x, y, 3x + 2y - 2)$

$f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (3x + 2y - 2 + 2)^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'_x = \frac{2(x-1)+2(3x+2y)*3}{2\sqrt{\phantom{x}}} = 0 \ddots \frac{}{2}$$
$$f'_y = \frac{2(y-1)+2(3x+2y)*3}{2\sqrt{\phantom{x}}} = 0 \ddots \frac{}{2}$$

$$\begin{cases} x-1+9x+6y=0 \\ y-1+x+4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x+6y-1=0 \ddots *(-5) \\ 6x+5y-1=0 \ddots *6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -50x-30y+5=0 \\ 36x+30y-6=0 \end{cases}$$
$$-14x=1$$
$$x=-\frac{1}{14}$$

$$\begin{cases} 10x+6y-1=0 \ddots *(-3) \\ 6x+5y-1=0 \ddots *5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -30x-18y+3=0 \\ 30x+25y-5=0 \end{cases}$$
$$7y=2$$
$$y=\frac{2}{7}$$
$$z=3*\left(-\frac{1}{14}\right)+2*\frac{2}{7}-2=-\frac{3}{14}+\frac{8}{14}-\frac{28}{14}=-\frac{17}{14}$$

$$\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{14},\frac{2}{7},-\frac{17}{14}\right)}$$

**TYPY ZADAŃ JAKIE MOGĄ POJAWIĆ SIĘ NA KOLOKWIUM (7 ZADAŃ, TRZEBA WYBRAĆ 5 ZADAŃ):**

1. Szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej
2. Różniczka dla funkcji dwóch zmiennych (przybliżone wartości)
3. Elementy badania funkcji jednej zmiennej:
   a) ekstrema i monotoniczność,
   b) punkty przegięcia i wypukłość,
   c) asymptoty.
4. Najmniejsza i największa wartość dla funkcji jednej zmiennej w zbiorze domkniętym (ekstremum globalne)
5. Ekstrema lokalne dla funkcji dwóch zmiennych
6. Ekstrema warunkowe dla funkcji dwóch zmiennych
7. Optymalizacja

## POWTÓRKA ZADAŃ:

**RÓŻNICZKA (przybliżona wartość)**

**Zadanie**:

Korzystając z różniczki I i II rzędu oblicz przybliżoną wartość $f(x,y)=e^x*y^2$ w punkcie (**0,05** ; **0,98**).

$$(x_0,y_0)=(0,1)$$
$$\Delta x = x - x_0 = 0{,}05$$

$\Delta y = \boldsymbol{y} - y_0 = -0{,}02$
$f(0{,}05\,;0{,}98) = e^{0{,}05} * (0{,}98)^2$
$$f(x,y) \approx \boldsymbol{f(x_0,y_0) + f'_x * \Delta x + f'_y * \Delta y} + \frac{1}{2}\left(f''_{xx} * \Delta x^2 + 2f''_{xy} * \Delta x * \Delta y + f''_{yy} * \Delta y^2\right)$$

$f(0{,}1) = e^0 * 1^2 = 1$
$f'_x = e^x * y^2 = 1$
$f'_y = 2e^x * y = 2$
$f''_{xx} = e^x * y^2 = 1$
$f''_{xy} = 2ye^x = 2$
$f''_{yy} = 2e^x = 2$

**Ekstremum globalne funkcji jednej zmiennej**
**Zadanie**:
Oblicz najmniejszą i największą wartość $f(x) = 2x^3 - 3x * |x-4| + 1$ w przedziale $< 0{,}6 >$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{dla} \quad a < 0 \end{cases}$$

1.
$x - 4 \geq 0 \implies x \geq 4 \implies x \in < 4{,}6 >$
$f(x) = 2x^3 - 3x(x-4) + 1$
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 1$

Wewnątrz przedziału:
$f'(x) = 6x^2 - 6x + 12 = 0 \because \backslash 6$
$x^2 - x + 2 = 0$
$\Delta = -7 \implies \Delta < 0 \implies \text{nie ma miejsc zerowych}$
$f(4) = 2 * 4^3 - 3 * 4 * |4-4| + 1 =$
$f(6) = 2 * 6^3 - 3 * 6 * |6-4| + 1 =$

2.
$x - 4 < 0 \implies x < 4 \implies x \in < 0{,}4)$
$f(x) = 2x^3 - 3x(-x+4) + 1$
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Wewnątrz przedziału:
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \because \backslash 6$
$x^2 + x - 2 = 0$
$\Delta = 9$
$$x_1 x_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, \cancel{-2}$$
$f(1) =$
$f(0) =$