Sieci Mobilne i Bezprzewodowe
laboratorium 1

Plan laboratoriów

- Teoria zdarzeń dyskretnych
- Modelowanie zdarzeń dyskretnych
- Symulacja zdarzeń dyskretnych
- Problem rozmieszczenia stacji raportujących i nieraportujących z wykorzystaniem narzędzi optymalizacji kombinatorycznej
- Problem zapożyczania kanałów z wykorzystaniem narzędzi optymalizacji
- Problem przydziału kanałów z wykorzystaniem narzędzi optymalizacji
- Propagacja fal
- Koncepcja komórki
- Sieci ad-hoc i sensorowe
- Systemy komunikacji mobilnej
- Ewolucja współpracy w mobilnych sieciach Ad-Hoc

Literatura

- D. P. Agrawal, Q.-A. Zeng, Introduction to Wireless and Mobile Systems, 2e, Thomson, 2006
- W. Stallings, Wireless Communications and Networks, 2e, Pearson Prentice Hall, 2005
- M. Ilyas, I. Mahgoub (eds.), Mobile Computing Handbook, Auerbach 2005
- Robert Wieczorkowski, Ryszard Zieliński, *Komputerowe generatory liczb losowych*, WNT 1997
- L. Rutkowski, Metody i techniki sztucznej inteligencji, PWN, 2009

Teoria zdarzeń dyskretnych

Plan laboratorium

- Dyskretne zmienne losowe i ich własności,

- Rozkłady zmiennych losowych dyskretnych:
  - Rozkład równomierny
  - Rozkład dwupunktowy
  - Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)
  - Rozkład Poissona
  - Rozkład geometryczny

Zmienna losowa dyskretna

- **Dyskretną (skokową) zmienną losową *X*** nazywamy zmienną losową jeżeli zbiór jej wartości jest skończony lub co najwyżej przeliczalny (ciąg liczbowy).

Niech:

K – zbiór wartości zmiennej losowej,

k – wartość ze zbioru zmiennych losowych (punkt skokowy zmiennej losowej X)

k= 0, 1, 2, …, K

- Rozkładem zmiennej losowej skokowej (funkcją rozkładu prawdopodobieństwa) nazywamy funkcję prawdopodobieństwa, która każdej realizacji zmiennej X przyporządkowuje określone prawdopodobieństwo. Prawdopodobieństwo (skok) p(k), że zmienna losowa X przyjmuje wartość k, jest zdefiniowane następująco:

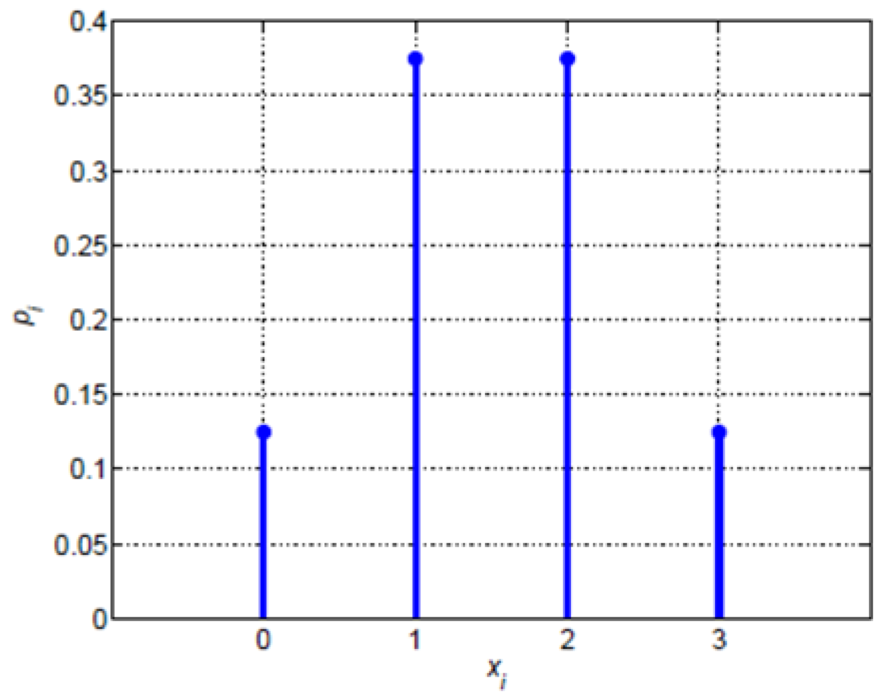
  p(k) = P(X = k), dla k= 0, 1, 2, …, K $\qquad P(X = x_i) = p_i$

- Własności prawdopodobieństwa:
  - 0 ≤ p(k) ≤1, dla każdego k,
  - ∑p(k) = 1, dla wszystkich k.

Przykład 1.

- Rzucamy trzema monetami i zliczamy uzyskane orły.

ω	$X(\omega)$
(O,O,O)	3
(O,O,R)	2
(O,R,O)	2
(R,O,O)	2
(R,R,O)	1
(R,O,R)	1
(O,R,R)	1
(R,R,R)	0



realizacje zm. X (x_i)	0	1	2	3
prawdopodobieństwa p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej

- Dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej może być określona za pomocą nierówności słabej (≤) lub mocnej (<).

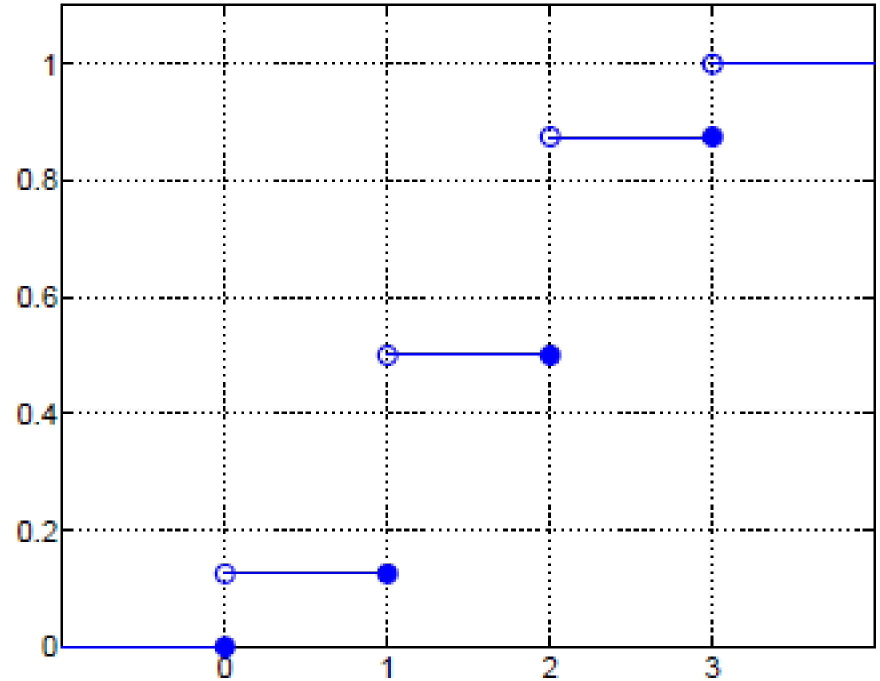
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i(x_i)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x < x_1 \\ p_1 & dla \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & dla \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ 1 & dla \quad x \geq x_{i-1} \end{cases}$$

Przykład 1. - kontynuacja

realizacje zm. X (x_i)	0	1	2	3
prawdopodobieństwa p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{4}{8}, & 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$



Wartość oczekiwana

- Wartość oczekiwana inaczej wartość przeciętna, średnia, nadzieja matematyczna, dyskretnej zmiennej losowej

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- Własności wartości oczekiwanej:
  - 1. $E(c) = c$,
  - 2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
  - 3. $E(XY) = E(X)E(Y)$, gdy zmienne losowe X i Y są niezależne,
  - 4. $E(cX) = E(c)E(X) = c\,E(X)$.

Wariancja dyskretnej zmiennej losowej

$$\sigma^2 = D^2(X) = Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Zatem:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Odchylenie standardowe (dyspersja):

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

- Własności:
  - 1. $D^2(c) = 0$,
  - 2. $D^2(cX) = c^2 D^2(X)$,
  - 3. $D^2(X \pm Y) = D^2(X) \pm D^2(Y)$, gdy X i Y są niezależne.

Przykład 1. - kontynuacja

realizacje zm. X (x_i)	0	1	2	3
prawdopodobieństwa p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

$$\mathrm{D}(X) = 0{,}866$$

Przykład 2.

- W autobusie MZK zgasło światło w momencie, gdy jeden z pasażerów szukał biletu celem skasowania go. Pasażer miał 10 biletów, w tym 5 po 2,40, 3 po 1,20 oraz 2 po 0,60. Pasażer wyciągnął na oślep jeden bilet i skasował go. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja jego opłaty za przejazd?

x_i	2,40	1,20	0,60
p_i	0,5	0,3	0,2

$E(X) = 2{,}40 \cdot 0{,}5 + 1{,}20 \cdot 0{,}3 + 0{,}60 \cdot 0{,}2 = 1{,}68$

$D^2(X) = (2{,}40 - 1{,}68)^2 \cdot 0{,}5 + (1{,}20 - 1{,}68)^2 \cdot 0{,}3 + (0{,}60 - 1{,}68)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5616$

$D(X) = 0{,}75$

Przykład 3.

- Dane są możliwe wartości dyskretnej zmiennej losowej *X*: $x^1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ *oraz* $E(X) = 0{,}1$, $E(X^2) = 0{,}9$. *Znaleźć rozkład X.*

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ (-1) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0{,}1 \\ (-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 \cdot p_3 = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} p_1 = 0{,}4 \\ p_2 = 0{,}1 \\ p_3 = 0{,}5 \end{cases}$$

Przykład 4.

- *X i Y są niezależne. Znaleźć wariancję zmiennej* losowej $Z = 3X + 2Y$, *jeżeli* $D^2(X) = 5$ *i* $D^2(Y) = 6$.

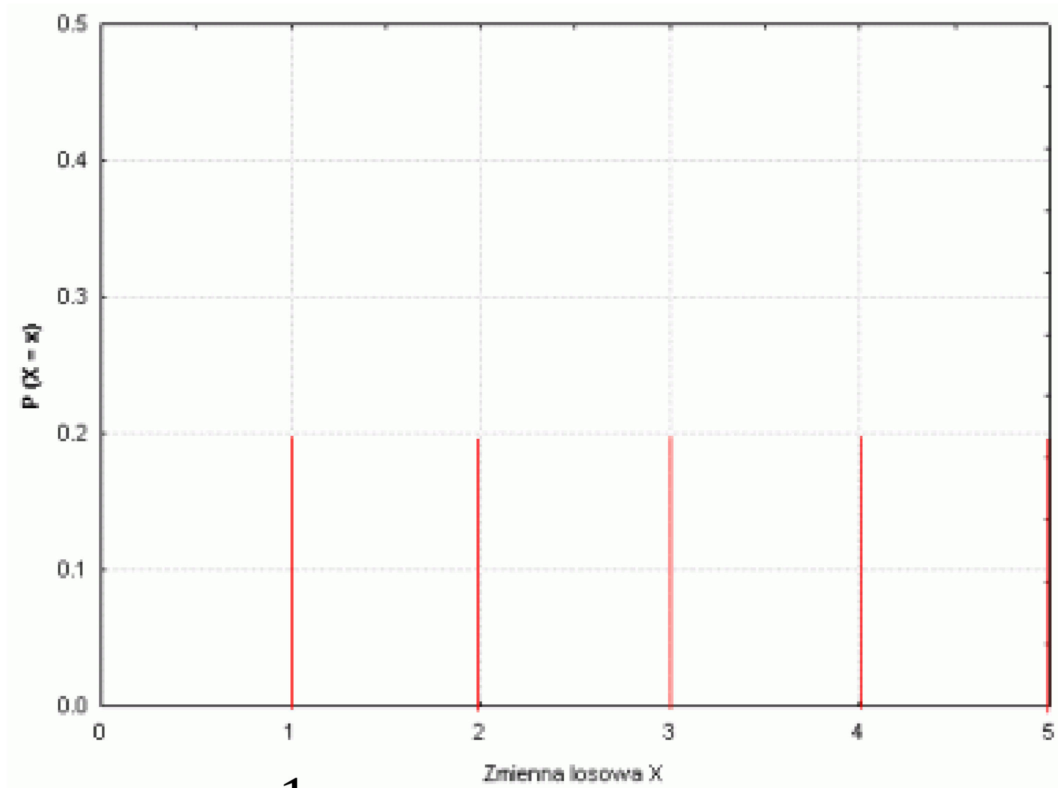
$$
\begin{aligned}
D^2(Z) &= D^2(3X + 2Y) \\
&= D^2(3X) + D^2(2Y) \\
&= 9D^2(X) + 4D^2(Y) \\
&= 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69
\end{aligned}
$$

Rozkłady
zmiennych losowych dyskretnych

1. Rozkład równomierny

- inaczej: jednostajny, prostokątny, z ang.: uniform distribution

Jeżeli zmienna losowa posiada skończoną liczbę realizacji, a prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na realizacji dowolnej zmiennej losowej jest jednakowe, mówimy wtedy o rozkładzie jednostajnym. Prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia z przestrzeni zdarzeń elementarnych jest stałe i dane wzorem:



$$P(X = k) = \frac{1}{K}$$ lub $$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

gdzie:

- K, (n) - liczebność zbioru zdarzeń elementarnych.

2. Rozkład dwupunktowy

Rozkład dwupunktowy stosuje się w przypadku zmiennych losowych, które przyjmują wyłącznie dwie wartości. Można więc nim opisywać doświadczenia mogące się zakończyć na dwa sposoby np. rzut monetą (orzeł lub reszka). W praktyce, służy w badaniach populacji dzielących się na dwie kategorie np. sygnał i brak sygnału. Istnieją więc dwie realizacje zmiennej losowej *X*: *X* = {*1*, *0*}. Gdy zmienna losowa przyjmuje wartość "1", przyjęło się mówić, że doświadczenie zakończyło się sukcesem, gdy natomiast zmienna przyjęła wartość "0", zakończyło się porażką.

i	1	2
x_i	0	1
p_i	q	p

$$P(0) = q \qquad P(1) = p$$

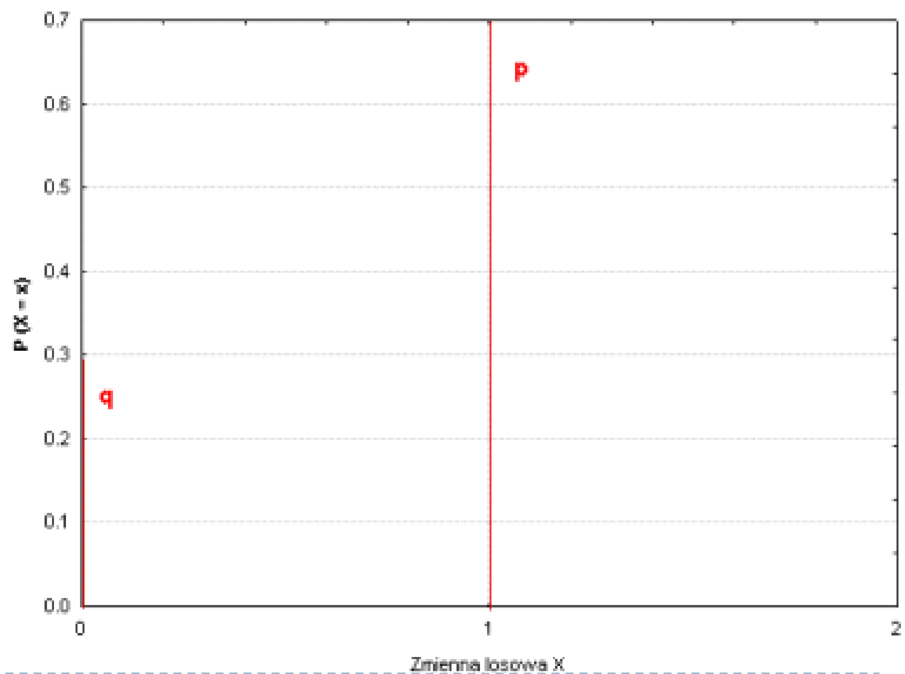
$$p + q = 1$$

$$P(x_i) = \begin{cases} p & gdy\ X = 1 \\ q = 1 - p & gdy\ X = 0 \end{cases}$$

Wartość oczekiwana: $E(X) = 0 * q + 1 * p = p$

Wariancja: $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$



3. Rozkład dwumianowy

- Inaczej: Bernoulliego, z ang.: Bernoulli; binomial distribution

Rozkład Bernoulliego jest najczęściej spotykanym w praktyce rozkładem zmiennej losowej. Stosujemy go wówczas gdy wykonujemy *n* niezależnych doświadczeń (wynik każdego nich nie zależy od doświadczeń poprzednich), przy czym każde z doświadczeń ma, podobnie jak w rozkładzie dwupunktowym jedno z dwóch możliwych wyników: sukces lub porażkę. Tak więc prawdopodobieństwo sukcesu jest w każdym z doświadczeń takie samo. Jako wartość zmiennej losowej przyjmujemy ilość sukcesów. Zmienna losowa może zatem przyjmować wartości: $X: X = \{0, 1, 2, 3, ...N\}$.

- Przykłady zastosowań:
  - rzut moneta (orzeł lub reszka),
  - test grupy osób na pewna chorobę (osoba zdrowa lub chora),
  - ankieta poparcia dla premiera (ankietowany popiera lub
  - nie popiera),
  - stany różnych telefonów w centralce zakładowej o zadanej porze (numer zajęty lub wolny).

Rozkład dwumianowy c.d.

- **Rozkład zmiennej losowej**.

Zdefiniujmy zmienną losową X równą liczbie sukcesów *k* (np. wyrzucenie orła) w N doświadczeniach (np. rzutach monetą). Załóżmy, ze otrzymaliśmy wynik:

O, O, R, O, R, R, O, O, R,

gdzie: O- oznacza wyrzucenie orła
R- oznacza wyrzucenie reszki
N=9; *k*=5;

Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania takiego ciągu?
Prawdopodobieństwo, że za pierwszym i następnymi razami wyrzucimy orła jest równe *p*. W związku z tym, że zdarzenia są niezależne, prawdopodobieństwo otrzymania takiego ciągu jest równe iloczynowi prawdopodobieństw kolejnych zdarzeń.

$$P(X=5) = p*p*q*p*q*q*p*p*q = p^5*q^4$$

W związku z tym, że interesują nas wszystkie możliwe ustawienia wyników (kombinacje bez powtórzeń), mnożymy wszystko przez dwumian Newtona i otrzymujemy:

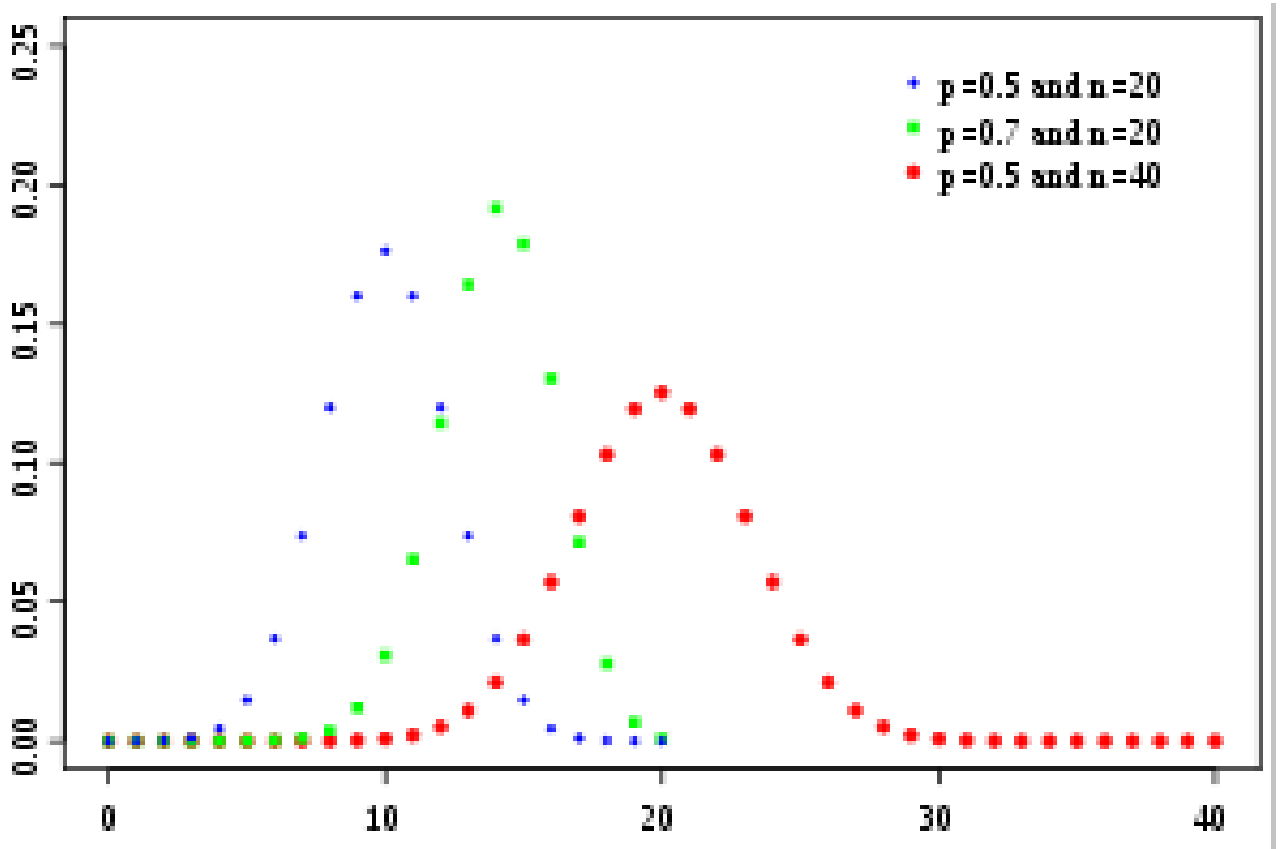
$$P(X=k) = P(X(k;N)) = P_k = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \qquad p+q=1$$

- gdzie:
N - ilość doświadczeń,
k - ilość sukcesów w *N* doświadczeniach,

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rozkład dwumianowy c.d.

$$P(X=k) = P(X(k;N) = P_k = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$



Rozkład dwumianowy c.d.

- Wartość oczekiwana

Zdefiniujmy zmienną losową Y równą liczbie sukcesów *k* w N doświadczeniach. Każdy z wyników otrzymanych w pojedynczym doświadczeniu zależy od innej zmiennej losowej Z, mającej dwie realizacje Z: Z={0, 1}.

Y	*Z*	**realizacje zmiennej losowej Z**
$y_0=0$	$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_N$	0, 0, 0, ..., 0
$y_1=1$	$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_N$	0, 0, 1, ..., 0
$y_2=2$	$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_N$	1, 0, 1, ..., 0
...	...	...
$y_n=N$	$z_1, z_2, z_3, \ldots z_N$	1, 1, 1, ..., 1

$$E(Y) = \sum E(Z_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i = Np$$

$$E(X) = Np_i$$

- Wariancja

$$Var(X) = Npq$$

Rozkład dwumianowy – Przykład 1.

- Dwóch równorzędnych graczy gra w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne dla każdego z nich:
  1. wygrać dwie partie z czterech,
  2. czy trzy z sześciu?

  Partie remisowe nie są brane pod uwagę.

- Rozwiązanie:

Co jest bardziej prawdopodobne?	N	k
2 z 4	4	2
3 z 6	6	3

$$P(X = k) = P(X(k;N) = P_k = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!(6-3)!}\frac{1}{8}\frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Zatem:
<u>łatwiej wygrać 2 partie z 4</u>
niż 3 partie z 6

Rozkład Poissona

- Rozkład Poissona

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad \lambda>0,\quad k=0,1,2,\dots$$

stanowi szczególny przypadek rozkładu dwumianowego (rozkład graniczny rozkładu Bernoulliego), w którym prawdopodobieństwo sukcesu *p* jest bardzo małe (p→0), a liczba niezależnych doświadczeń *N* jest bardzo duża (N→∞), że iloczyn: $Np = const = \lambda$

jest wielkością stałą, dodatnią i niezbyt dużą.

$$\binom{N}{k}p^k q^{N-k}\xrightarrow[np=\lambda=const]{n\to\infty}\binom{N}{k}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona c.d.

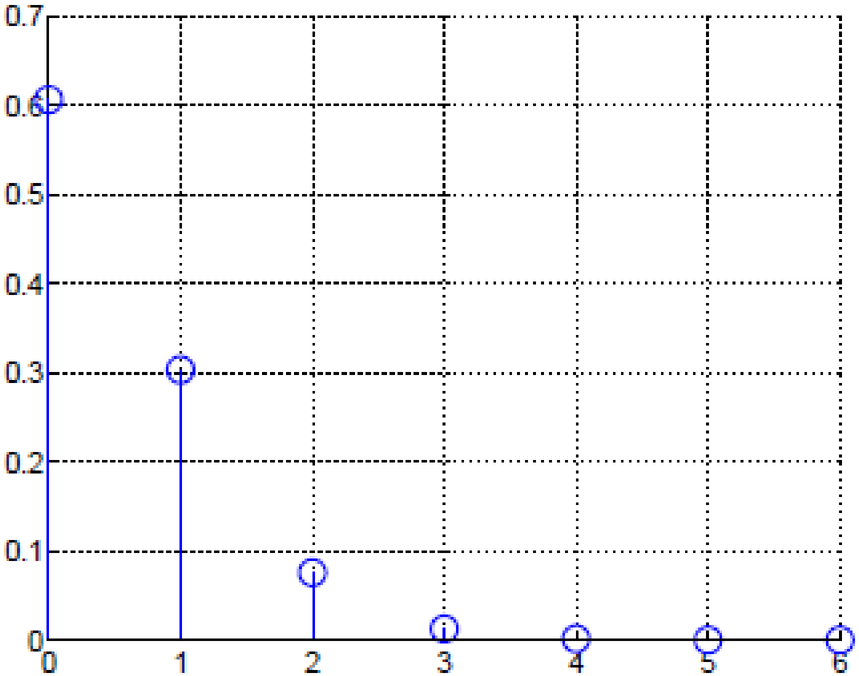
- Wartość oczekiwana: $E(X) = \lambda$
- Wariancja: $Var(X) = \lambda$

- Przykłady zastosowań:
  - liczba błędów typograficznych w książce,
  - liczba samochodów uczestniczących danego dnia w kolizjach drogowych w dużym mieście,
  - liczba konfliktów w dostępie do zasobów w sieci komputerowej w ciągu 1 godziny,
  - liczba błędów lekarskich popełnionych w miesiącu w całym szpitalu,
  - rozpad promieniotwórczy: liczba jąder n duża, prawdopodobieństwo rozpadu konkretnego jądra bardzo małe,
  - zderzenia cząstek elementarnych, duża ilość cząstek, mała szansa na zderzenie.

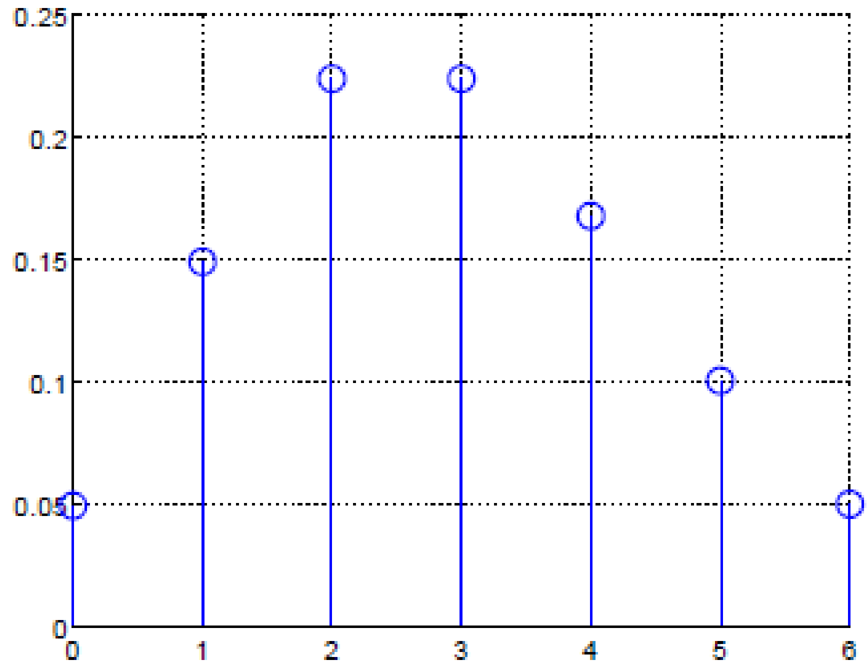
Rozkład Poissona c.d.

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\lambda = 0{,}5$



$\lambda = 3$



Rozkład geometryczny

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,3,\ldots$$

- rozkład opisujący sytuacje gdy powtarzamy doświadczenie Bernoulliego aż do uzyskania pierwszego sukcesu,
  - liczba rzutów moneta, aż do uzyskania pierwszego orła,
  - liczba prób wysłania pakietu poczta elektroniczna,
  - liczba prób automatycznego załączenia sieci energetycznej lub systemu zasilania po awarii.

- Wartość oczekiwana: $E(X)=\dfrac{1}{p}$
- Wariancja: $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

Rozkład geometryczny c.d.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$