I. Zastosowanie Centralnego Twierdzenia Granicznego

Zadanie 1. Liczba projektów informatycznych, które przyjmuje firma do wykonania w losowo wybranym dniu jest zmienną losową X o funkcji prawdopodobieństwa f określonej tabelą:

x	0	1	2
f(x)	0,4	0,5	0,1

Liczby projektów przyjmowanych do wykonania w ciągu różnych dni są niezależnymi zmiennymi losowymi.

X_i - liczba projektów informatycznych w i-tym dniu
$\mu = 0*0,04 + 1*0,5 + 2*0,1 = 0,7$
$\delta^2 = (0-0,7)^2*0,4 + (1-0,7)^2*0,5 + (2-0,7)^2*0,1 = 0,196 + 0,045 + 0,169 = 0,41$
δ = pierw. z 0,41 = 0,64

(a) Oblicz wartość średnią i wariancję liczby projektów, które przyjmie firma do wykonania w ciągu 10-ciu losowo wybranych dni.

$E(X_1+X_2+...+X_{10}) = E(X_1)+E(X_2)+...E(X_{10}) = 10*0,7 = 7$
$\delta^2(X_1+X_2+...+X_{10}) = \delta^2(X_1)+\delta^2(X_2)+... \delta^2(X_{10}) = 10*0,64 = 6,4$

(b) Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 36 losowo wybranych dni firma przyjmie do wykonania więcej niż 20 projektów.

P(suma od 1 do 36 $X_i > 20$) = $P(X > 20/36) = P(X - \mu / \delta/\sqrt{n} > 20/36 - \mu / \delta/\sqrt{n}$ =(CTG) $P(Z > 20/36 - 0,7 / 0,64/6) = P(Z > -1,35) = 1 - \Phi(-1,35) = 1 - (1 - \Phi(1,35)) = ...$

Zadanie 2. Liczba awarii sieci informatycznej w ciągu tygodnia jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią 2. Liczby awarii w różnych tygodniach są niezależnymi zmiennymi losowymi. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 25 tygodni wystąpi więcej niż 60 awarii.

$\mu = \lambda$; $\delta^2 = \lambda \Rightarrow \mu = 2$ i $\lambda = 2$ więc $\delta^2 = 2$ a δ = pierw. z 2
X_i = liczba awarii w ciągu i - tego tygodnia

P(suma od 1 do 25 $X_i > 60$) = $P(X > 60/25) = P(X > 2,4) = P(X - 2 / \sqrt{\frac{2}{25}}$) = (CTG) $P(Z > 0,4*5/\sqrt{2}) = P(Z > 1,41) = 1 - \Phi(1,41) = ...$

Zadanie 3. Czas oczekiwania na połączenie z pewną siecią teleinformatyczną jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 10 sekund. Czasy oczekiwań różnych zgłoszeń są niezależnymi zmiennymi losowymi. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że średni czas oczekiwania 49–ciu zgłoszeń odchyli się od średniego czasu oczekiwania (10 sekund) o więcej niż 5 (sekund).

X_i – czas oczekiwania
$\mu = 1/\lambda$; $\delta^2 = 1/\lambda^2$ więc $\mu = 10 \Rightarrow \lambda = 1/10$ a $\delta^2 = 1/1/100 = 100$ to $\delta = 10$
$P(|X - \mu| > 5) = ?$; $n = 49$

$P(|X - \mu| > 5) = 1 - P(|X - \mu| <= 5) = 1 - P(-5 <= X - \mu <= 5) = 1 - P(-5/\delta/\sqrt{n} <= X - \mu/\delta/\sqrt{n} <= 5/\delta/\sqrt{n}$) = (CTG) $1 - P(-5*7/10 <= Z <= 5*7/10) =$
$1 - P(-3,5 <= Z <= 3,5) = 1 - [\Phi(3,5) - \Phi(-3,5)] = 1 - [\Phi(3,5) - (1 - \Phi(3,5))] =$
$1 - [2\Phi(3,5) - 1] = 2 - 2\Phi(3,5)$

Zadanie 4. Bank zakupił 100 monitorów, które pracują niezależnie. Prawdopodobieństwo uszkodzenia monitora w okresie gwarancji wynosi 0,05. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że w okresie gwarancji awarii ulegnie

X_i – i – ty monitor uległ awarii
$\mu = np = 100*0,05 = 5$; $\delta^2 = np(1-p) = 100*0,05*(0,95) = 4,75$

(a) więcej niż 7 monitorów.

P(suma od 1 do 100 $X_i > 7$) = $P(X > 0,07) = P(X-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} > 0,07-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}}$) = (CTG) $P(Z>(0,07-5)*10/\sqrt{4,75}) = P(Z > -4,93/2,18) = P(Z>-2,61) =$

$1 - (1 - \Phi(2,61))$

(b) co najmniej 5 i co najwyżej 10 monitorów.

P(suma od 1 do 100 $X_i <= 10$) = $P(0,05 <= Z <= 0,01) = P(0,05-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} <= Z-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} <= 0,05+5/\sqrt{\frac{4,75}{100}}$) = (CTG) $P(-22,6 <= Z <= -22,89) =$
$\Phi(22,61) - \Phi(22,89)$

(c) mniej niż 10 monitorów

P(suma od 1 do 100 <= 9) = $P(X <= 0,09) = P(X-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} <= 0,09-5/\sqrt{\frac{4,75}{100}}$) = (CTG) $P(Z <= -22,52) = \Phi(22,52)$

II. Rozkłady prawdopodobieństwa par zmiennych losowych

Zadanie 5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybranego studenta pewnej uczelni. Wartości x = 0, 1, 2 oznaczają liczbę zdanych egzaminów w I semestrze, a wartość y = 0 oznacza nie ukończenie studiów w terminie, natomiast y = 1 oznacza ukończenie studiów w terminie. Funkcja prawdopodobieństwa łącznego zmiennej losowej (X,Y) dana jest tabelą:

y / x	0	1	Rozkł dla X
0	0,03	0,05	0,08
1	0,01	0,1	0,11
2	0,01	0,8	0,81
Rozkł dla y	0,05	0,95	

(a) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wybrany losowo student ukończy studia w terminie, pod warunkiem że w I semestrze nie zdał co najmniej 1 egzaminu.

P(y = 1 / x = 0 i 1) = 0,15/0,19

(b) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wybrany losowo student ukończy studia w terminie, pod warunkiem że w I semestrze zdał co najmniej 1 egzamin.

P(y = 1 / x = 1 i 2) = 0,9/0,92

(c) Oblicz Cov(X,Y).
Cov – kowariancja: cov(x,y) = EX + EY – E(X*Y)
EX = 0*0,08+1*0,11+2*0,81 = ...
EY = 0*0,05+1*0,95 =
E(X*Y) = 0+0,03*0+0*0,05*1+1*0,01*0+1*0,1*1...

Zadanie 6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybranego absolwenta pewnej uczelni. Wartość zmiennej X oznacza liczbę języków obcych, które zna absolwent, a wartość Y jest oceną na dyplomie. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej (X,Y) określona jest tabelą

y / x	3	4	5
1	0,1	0,2	0,2
2	0,05	0,15	0,2
3	0,01	0,02	0,07

(a) Oblicz warunkowe prawdopodobieństwo, że losowo wybrany absolwent ma na dyplomie ocenę 5, jeśli wiadomo, że zna więcej niż 1 obcy język.
(b) Oblicz E(XY), E(Y), E(X + Y).
(c) Czy ocena na dyplomie i znajomość języków obcych przez absolwenta uczelni są cechami zależnymi ?

zmienne niezależne wtedy gdy:
E(X,Y) = wart brzeg. X * wart brzeg. Y
To: P(x,y) = P(X) * P(Y) czyli:

$P(1,3) = 0,1$; $P_x(1) = 0,5$; $P_y(3) = 0,16 \Rightarrow 0,5*0,16$ 0,1
Odp. zależne

Zadanie 7. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma funkcje prawdopodobieństwa określona tabela

y / x	0	1
-2	0,2	0,4
1	0,1	0,3

$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)$

$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}$

SAD

(a) Oblicz współczynnik korelacji między zmiennymi X, Y.
Korelacja: $\delta(X,Y) = cov(x,y)\backslash Dx * Dy$ gdzie DX,Dy jest wartością oczekiwaną
$D^2x = (EX)^2 - E(X)^2$; $D^2y = (EY)^2 - E(Y)^2$
$E(X)^2$ = prawd. Brzegowe * x^2 ; $E(Y)^2$ = prawd. Brzegowe * y^2

(b) Oblicz $E(X^2 + 2Y)$

$E(X^2 + 2Y) = E(X)^2 + 2E(Y)$

(c) Czy zmienne losowe X, Y są niezależne ?

$P(-2,0) = 0,2$; $P_x(-2) = 0,6$; $P_y(0) = 0,3 \Rightarrow 0,6*0,3 \quad 0,2$

Zadanie 8. Dwuwymiarowa zmienna losowa ciągła (X,Y) ma funkcję gęstości łącznej postaci

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx & \text{gdy } 0 \quad x \quad 2,\ 0 \quad y \quad 1 \\ 0 & przeciwnie \end{cases}.$$

(a) Znajdź funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

funkcja prawdopodobieństwa określona wzorem: $\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dxdy = 1$

$$\int_0^2\int_0^1 Cx\,dxdy = C\int_0^2\int_0^1 x\,dxdy = C\int_0^2 xdx \int_0^1 1dy = C\left[\frac{x2}{2}\right]_0^2\cdot[y]_0^1 = 4/2 - 0/2 * (1-0) = 2$$

2C = 1
c = 1/2

(b) Oblicz $E(Y^2)$.

$$E(Y)^2 = \int (y \cdot_{\text{rozkł brzeg y}})^2\,dy \ ; \text{rozkł brzeg y} = \int_0^2 1/2xdx = \left[\frac{x2}{2}\right]_0^2 = 2 \ ; E(Y)^2 = \int_0^1 y2 * 2dy = 2*1/3 = 2/3$$

(c) Oblicz E(XY).

$$E(XY) = \int_0^2\int_0^1 1/2x\,dudy = 1/2\int_0^2\int_0^1 x\,dudy = 1/2\int_0^1 ydy * \int_0^2 x2dx = 1/2*1/2*8/3$$

III. Przedziały ufności

Zadanie 9. W teście psychotechnicznym dla kierowców zmierzono czasy reakcji 9-ciu losowo wybranych kierowców. Otrzymano średnią próbkową 7 (sek.) i wariancję próbkową 1 (sek^2). Wyznacz 95 % przedział ufności dla wartości średniej czasu reakcji kierowcy zakładając, że czas reakcji jest zmienną losową o rozkładzie normalnym.

Populacja – kierowcy
Cecha X – czas reakcji kierowcy
$n = 9$; $\lambda = 0,05$; $X = 7$; $S^2 = 1$
X ma rozkł. Normalny $N(\lambda, \delta)$; nie znamy μ i δ^2
$1 - \lambda/2 = 0,975$; $\lambda - 1 = 8$
rozkład t-Studenta $t_{0,975;8}$= ...tablice

$\mu \in (7 - t_{0,975;8} * 1/\sqrt{9} \ ; 7 + t_{0,975;8} * 1/\sqrt{9})$

Zadanie 10. Wagi pięciu losowo wybranych noworodków wyniosły (w kg) : 3,75 3,45 3,50 3,90 3, 25. Zakładając rozkład normalny wagi noworodka wyznacz 99 % przedział ufności dla wartości średniej wagi noworodka.

Populacja – noworodki
Cecha X – waga ciała
$n=5$; $\lambda = 0,01$
$X= 3,57$; $S^2 = (3,75-3,57)^2$...

$\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{n}} \in \langle a, b\rangle\right) \approx$
$\approx P(z \in \langle a, b\rangle) =$
$\Phi(b) - \Phi(a)$

Zadanie 11. Dla danych w zadaniu 9 wyznacz 90 % przedział ufności dla wariancji wagi noworodka.

Pocz tak jak w zad 10 tylko. że $\lambda = 0,1$
$X=3,57$; $S^2 = 0,06$; $S = 0,25$; $1 - \lambda/2 = 0,95$; $\lambda/2 = 0,05$
Szukamy wart średnich dla $X^2_{0,95;4} \Rightarrow \delta^2 \in ((n-1)\,S^2/X^2_{0,95;4} \ ; (n+1)\,S^2/X^2_{0,95;4})$

Zadanie 12. Jeśli 99 % przedział ufności wyniósł [5.02, 6.98], to przy założeniu, że badano cechę o rozkładzie normalnym, jaką wartość przyjęła średnia próbkowa ?

Zadanie 13. Wśród stu losowo wybranych Polaków 67 osób zadeklarowało, że popiera wejście Polski do Unii Europejskiej. Oblicz przybliżony 95 % przedział ufności dla proporcji Polaków, którzy popierają wejście Polski do UE.

1745 – 1845 (203)(107)

zad 2.
$\mu = \frac{21}{6} \quad \sigma^2 = \frac{5}{21} \quad P(30 \le \sum_{i=1}^{10} x_i \le 40) - P(\frac{30}{10} \le \bar{x} < \frac{40}{10}) - P(3 \le \bar{x} \le 4) = P\left(\frac{3-3,5}{\sqrt{\frac{2,91}{10}}} < \frac{\bar{x}-3,5}{\sqrt{\frac{2,91}{10}}}\right.$
$\left.\le \frac{4-3,5}{\sqrt{\frac{2,91}{10}}}\right) \approx P\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,2511}} \le z \le \frac{0,5}{\sqrt{0,2511}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,251}}\right) - 1 = 2\cdot\Phi(0,93) - 1 =$
$\Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,291}}\right) - \Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,291}}\right) = \Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{2,91}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,291}}\right) =$
$= 2\cdot 0,8238 - 1 \approx 0,65$

Przedziały ufności
$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \quad \sum x_i = 425 \quad \sum x_i^2 = 10881$
$n = 17 \quad s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum(x^2 - n(\bar{x})^2)}{n-1} = \frac{10881 - 17\cdot 25^2}{17-1} = 16$
$\bar{x} = \frac{425}{17} = 25 \quad s = 4$
$t_{0,975;16} = 2,1199 \quad t_{0,975;16}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2,1199\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \approx 2,06 \quad \mu \in (25 - 2,06; 25 + 2,06)$
$\mu \in (22,94 ; 27,06)$

II Rozkład prawdopodobieństwa par zmiennych losowych

zad. 5

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje się losowo wybranego studenta. Wartości $x=0,1,2$ oznaczają liczbę zdanych egzaminów w I sem., a wartość $y=0$ oznacza nie ukończenie studiów w terminie, a $y=1$ ukończenie w term. Funkcja prawdop. dana jest tabelą:

X \ Y	0	1	
0	0,03	0,05	0,08
1	0,01	0,1	0,11
2	0,01	0,8	0,81
	0,05	0,95	

a) Oblicz prawd. war., że wybrany losowo student ukończy studia w term, pod warunkiem, że w I sem. nie zdał co najmn. 1 egzaminu.

$$\frac{P(y=1|x=0)+P(y=1|x=1)}{P(x=0,x=1)} = \frac{0,05+0,1}{0,11+0,08} = \frac{0,15}{0,19} = 79\%$$

b) Obl. prawd. war., że wybrany los. student ukończy studia w terminie, pod war., że w 1 sem. zdał co najm. 1 egzamin.

$$\frac{P(y=1|x=1)+P(y=1|x=2)}{P(x=1,x=2)} = \frac{0,1+0,8}{0,11+0,81} = \frac{0,9}{0,92} = 97,8\%$$

c) Oblicz $Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY$

X	EX	Y	EY
0	$0\cdot0,08=0$	0	$0\cdot0,05=0$
1	$1\cdot0,11=0,11$	1	$1\cdot0,95=0,95$
2	$2\cdot0,81=1,62$		
	1,73		0,95

$E(XY) = 0\cdot0\cdot0,03+0\cdot1\cdot0,05+1\cdot0\cdot0,01+1\cdot1\cdot0,1+2\cdot0\cdot0,01+2\cdot1\cdot0,8 = 0,1+1,6 = 1,7$

$Cov(X,Y) = 1,7 - 1,73\cdot0,95 = 0,0565$

zad. 6

Dwuwymiarowa zm. losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybr. absolwenta uczelni. Wartość zmiennej X oznacza liczbę języków obcych, które zna absolwent, a wartość Y jest oceną w dyplomie. Funkcja ma tabelę:

X \ Y	3	4	5	
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,05	0,15	0,2	0,4
3	0,01	0,02	0,07	0,1
	0,16	0,37	0,47	

a) Obl. prawd. war. że losowo wybrany absol. ma na dypl. ocenę 5 jeśli wiadomo, że zna więcej niż 1 obcy język.

$$\frac{P(y=5|x=2)+P(y=5|x=3)}{P(x=2,x=3)} = \frac{0,2+0,07}{0,4+0,1} = \frac{0,27}{0,5} = 54\%$$

b) Oblicz $E(XY), E(Y), E(X+Y)$

$E(XY) = 1\cdot3\cdot0,1+1\cdot4\cdot0,2+1\cdot5\cdot0,2+2\cdot3\cdot0,05+2\cdot4\cdot0,15+2\cdot5\cdot0,2+3\cdot3\cdot0,01+3\cdot4\cdot0,02+3\cdot5\cdot0,07 =$
$= 0,3+0,8+1+0,3+1,2+2+0,09+0,24+1,05 = 6,98$

$E(Y) = 3\cdot0,16+4\cdot0,37+5\cdot0,47 = 0,48+1,48+2,35 = 4,31$

$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

$E(X) = 1\cdot0,5+2\cdot0,4+3\cdot0,1 = 0,5+0,8+0,3 = 1,6$

$E(X+Y) = 4,31+1,6 = 5,91$

c) Czy ocena na dyplomie i znajomość j.o. są cechami zależnymi!

$X_1 = X \quad X_2 = Y \quad X_1 \in \{1,2,3\}$
$X_2 \in \{3,4,5\}$

$P(x=1, y=3) = P(x=1)\cdot P(x=3) \Rightarrow 0,1 \neq 0,5\cdot0,16$
$0,1 \neq 0,8$ są cechami zależnymi

zad. 7

a) Obl. współczynnik korelacji między X i Y.

X \ Y	0	1
-2	0,2	0,4
1	0,1	0,3

korel. $\rho(x,y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D^2X\,D^2Y}}$

$D^2X = EX^2-(EX)^2 \quad D^2Y = EY^2-(EY)^2$

$E(XY) = (-2)\cdot0\cdot0,2+(-2)\cdot1\cdot0,4+1\cdot0\cdot0,1+1\cdot1\cdot0,3 = -0,5$

$EX = (-2)\cdot0,6+1\cdot0,4 = (-1,2)+0,4 = -0,8$

$EY = 0\cdot0,3+1\cdot0,7 = 0,7$

$cov(X,Y) = -0,5-(-0,8\cdot0,7) = -0,5+0,56 = 0,06$

$EX^2 = (-2)^2\cdot0,6+1^2\cdot0,4 = 2,4+0,4 = 2,8$

$(EX)^2 = (-0,8)^2 = 0,64 \quad D^2X = 2,8-0,64 = 2,16$

$EY^2 = 1^2\cdot0,7 = 0,7 \quad (EY)^2 = (0,7)^2 = 0,49 \quad D^2Y = 0,7-0,49 = 0,21$

$\rho(X,Y) = \frac{0,06}{\sqrt{2,37}} = \frac{0,06}{0,673} = 0,09$

b) Obl. $E(X^2+2Y)$

$E(X^2+2Y) = E(X^2)+2EY = 2,8+2\cdot0,7 = 2,8+1,4 = 4,2$

c) czy zmienne losowe X, Y są niezależne?

$0,2 = 0,3\cdot0,6 \quad 0,2 \neq 0,18$ zmienne są zależne

zad. 8

Dwuwymiarowa zm. losowa ciągła (X,Y) ma funk. gęstości i prawej postaci

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx & \text{gdy } 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

a) znajdź funk. prawdopodob. zm. los. X

$\int_0^1\left[\int_0^2 Cx\,dx\right]dy = 1 \quad \int_0^1\left[C\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2\right]dy = 1$

$\int_0^1[2C]\,dy = 1 \quad 2C\int_0^1 1\,dy = 1 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{gdy } 0\le x\le 2 \quad 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

b) Oblicz $E(Y^2)$

$\int_0^1\left[\int_0^2 y^2\tfrac{1}{2}x\,dx\right]dy = \int_0^1\left[y^2\tfrac{1}{2}\cdot2\right]dy = \int_0^1 y^2dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

c) Obl. $E(XY)$

$\int_0^1\left[\int_0^1 xy\tfrac{1}{2}x\,dx\right]dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y\int_0^2 x^2dx\right]dy = \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y\cdot\left[\tfrac{x^3}{3}\Big|_2^0\right]\right]dy$
$= \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}y\left(\tfrac{8}{3}\right)\right]dy = \int_0^1\tfrac{4}{3}y\,dy = \tfrac{4}{3}\int_0^1 y\,dy = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3}$

III Przedziały ufności

zad. 9

W teście psycho dla kier. zmierzono czas reakcji 9-ciu losowo wybranych kier. otrzymano średnią próbkową 7 sek i wariancję próbk. 1 sek². Wyznacz 95% przedział ufności dla wart. średniej czasu reakcji kier. zakładając, że czas reakcji jest zm. losową o rozkł. norm.

$1-\alpha = 95\% \quad \alpha = 5\% \quad \bar{x} = 7 \quad N = 9 \quad \sigma^2 = 1 \quad \sigma = 1$

$1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \quad z = 2,998$ potrzebny na $n-1$ i $1-\frac{\alpha}{2}$

$P\left(7-\frac{1\cdot2,998}{\sqrt{9}} \le \mu \le 7+\frac{1\cdot2,998}{\sqrt{9}}\right)$

$[7-0,999;\ 7+0,999]$ czyli $[6,001;\ 7,999]$

zad. 10

Wagi pięciu losowo wybranych noworodków wyniosły 3,75; 3,45; 3,50; 3,90; 3,25. Zakładając rozkład normalny wagi noworodków wyznacz 99% przedział uf. dla wart. średn. wagi noworodka.

$1-\alpha = 0,99 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0,995 \quad \alpha = 0,01$

$\bar{x} = 3,57 \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 \quad s = 0,26$

$s = \sqrt{1/4\cdot(3,75-3,57)^2+(3,...-3,57)^2...}$

$[3,57-5,841\cdot0,11;\ 3,57+5,841\cdot0,11] = [2,88;\ 4,2...]$

zad. 11

Dla danych z zad 10 wyznacz 90% przedział ufności dla war. wagi noworodka.

$1-\alpha = 0,9 \quad \alpha = 0,1 \quad \bar{x} = 3,57 \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95 \quad n = 5 \quad s = 0,26$

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}};\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}\right] = \left[\frac{4(0,26)^2}{0,711};\ \frac{4(0,26)^2}{9,488}\right]$$

zad. 12

Jeśli 99% przedział ufności wyniósł [5,02; 6,98] to przy założeniu, że badano cechę o rozkł. norm. jaką wartości przyjęła średnia próbkowa?

$$\frac{5,02+6,98}{2} = 6$$

zad. 13

Wśród 100 losowo wybranych Polaków 67 osób zadeklarowało, że popiera UE. Oblicz przybliż. 95% przedział ufności dla proporcji Polaków którzy popierają wejście Polski do UE.

$$\left[\hat{p}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$1-\alpha = 0,95$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \quad n = 100 \quad \hat{p} = 0,67$

w rozkł. norm. szukamy 0,975. $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$\left[0,67-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,67\cdot0,33}{100}};\ 0,67+1,96\sqrt{\frac{0,67\cdot0,33}{100}}\right]$$

Zastosowanie Centralnego Twierdzenia Granicznego

Zad. 1

Liczba projektów informatycznych, które przyjmuje firma do wykonania w losowo wybranym dniu jest zmienną los X o funkcji prawdop f określonej tabelą:

X	0	1	2
f(x)	0,4	0,5	0,1

Liczby projektów przyjmowanych do wykonania w ciągu różnych dni są niezależnymi zmiennymi losowymi:

a) Oblicz wartość średnią i wariancję liczby projektów, które przyjmie firma do wykonania w ciągu 10 dni los. wybranych dni.

X_i - liczba proj. inf. w i-tym dniu

$\mu = 0\cdot 0,04 + 1\cdot 0,5 + 2\cdot 0,1 = 0,7$

$\delta^2 = (0-0,7)^2\cdot 0,4 + (1-0,7)^2\cdot 0,5 +$
$+ (2-0,7)^2\cdot 0,1 = 0,196 + 0,045 + 0,169 = 0,41$

$\delta = \sqrt{0,41} = 0,64$

b) Oblicz przybliżone prawd., że w ciągu 36 losowo wybr. dni firma przyjmie do wyk. więcej niż 20 projektów

rozk. norm.

$P(\sum_{i=1}^{36} X_i > 20) = P(X > 20/36) =$

$= P(X - \mu/\delta/\sqrt{n} > 20/36 - \mu/\delta/\sqrt{n} =$

$= (CTG) P(Z > 20/36 - 0,07/0,64/6) =$

$= P(Z > -1,35) = 1 - \Phi(-1,35) = 1 - (1 - \Phi(1,35))$

$= \ldots$

Zad. 2

Liczba awarii sieci inf w ciągu tyg. jest zmienną losową o rozkł. Poissona ze średnią 2. L. awarii w różnych tyg. są niezależnymi zmiennymi losowymi. Obl. przybliżone prawd. że w ciągu 25 tyg. wystąpi więcej niż 60 awarii

$\mu = \lambda$ $\delta^2 = \lambda \Rightarrow \mu = 2$ i $\lambda = 2$ więc $\delta^2 = 2$

$\delta = \sqrt{2}$

X_i = l. awarii w ciągu i-tego tygodnia

$P(\sum_{1}^{25} X_i > 60) = P(X > 60/25) = P(X > 2,4) =$

$= P(X - 2/\sqrt{\frac{2}{25}}) = (CTG)\ P(Z > 0,4\cdot 5/\sqrt{2}) =$

$= P(Z > 1,41) = 1 - \Phi(1,41) = \ldots$

Zad. 3

Czas oczekiwania na połączenie z pewną siecią teleinf jest zmienną losową o rozkł. wykładn. ze średnią 10 sek. Czasy oczekiwań różnych sposobów są niezależnymi zm. los. Oblicz prawdop, że średni czas oczekiw. 49-ciu sposobów odchyli się od średn. czasu oczekiw o co najwyżej więcej niż 5 sek.

X_i - czas oczekiwania

$\mu = 1/\lambda$; $\delta^2 = 1/\lambda^2$ więc $\mu = 10 \Rightarrow \lambda =$
$= 1/10$ a $\delta^2 = 1/1/100 = 100$ to $\delta = 10$

$P(|X - \mu| > 5) = ?$; $n = 49$

$P(|X-\mu| > 5) = 1 - P(|X - \mu| \leq 5) =$

$= 1 - P(-5 \leq X - \mu \leq 5) = 1 - P(-5/\delta/\sqrt{n} \leq$
$X - \mu/\delta/\sqrt{n} \leq 5/\delta/\sqrt{n}) = (CTG)\ 1 - P(-5\cdot 7/10 \leq$
$Z \leq 5\cdot 7/10) =$

$1 - P(-3,5 \leq Z \leq 3,5) = 1 - [\Phi(3,5) - \Phi(-3,5)] =$

$= 1 - [\Phi(3,5) - (1 - \Phi(3,5))] = \ldots$

$1 - [2\Phi(3,5) - 1] = 2 - 2\Phi(3,5)$

Zad. 4

Bank zakupił 100 monitorów, które pracują niezależnie. Prawdop. uszkodzenia monit w okresie gwarancji wynosi 0,05. Oblicz przybliż. prawdop., że w okresie gwarancji ulegnie uszkodzeniu

a) więcej niż 7 monit

$P(\sum_{1}^{100} X_i > 7) = P(X > 0,07) = P(X - 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} > 0,07 -$

$- 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}}) = (CTG)\ P(Z > (0,07 - 5)\cdot 10/\sqrt{4,75}) =$

$= P(Z > -4,93/2,18) = P(Z > -2,61) =$

$= 1 - (1 - \Phi(2,61))$

b) co najmniej 5 i co najw. 10 monit

$P(\sum_{1}^{100} X_i \leq 10) = P(0,05 \leq Z \leq 0,01) =$

$= P(0,05 - 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} \leq Z - 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} \leq 0,05 + 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}}$

$= (CTG)\ P(-22,6 \leq Z \leq -22,89) =$

$= \Phi(22,61) - \Phi(22,89)$.

c) mniej niż 10 monit.

$P(\sum_{1}^{100} X_i \leq 9) = P(X \leq 0,09) = P(X - 5/\sqrt{\frac{4,75}{100}} \leq 0,09 - 5/\ldots$

$= (CTG)\ P(Z \leq -22,52) = \Phi(-22,52)$