Indeksy ekonomiczne

Numer artykułu	Ilość Rok 0	Ilość Rok 1	Cena jednostkowa Rok 0	Cena jednostkowa Rok 1
1	q_{10}	q_{11}	p_{10}	p_{11}
2	q_{20}	q_{21}	p_{20}	p_{21}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	q_{k0}	q_{k1}	p_{k0}	p_{k1}

Rok 0 rok bazowy
Rok 1 rok badany

Problem:
opisać syntetycznie zmiany wartości w roku badanym w stosunku do roku bazowego;
wyodrębnić wpływ zmian ilości oraz zmian cen.

Numer	Wartość	Wartość
1	$w_{1,00} = q_{10}p_{10}$	$w_{1,11} = q_{11}p_{11}$
2	$w_{2,00} = q_{20}p_{20}$	$w_{2,11} = q_{21}p_{21}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$w_{k,00} = q_{k0}p_{k0}$	$w_{k,11} = q_{k1}p_{k1}$
Razem	w_{00}	w_{11}

Numer	Wartość	Wartość
1	$w_{1,01} = q_{10}p_{11}$	$w_{1,10} = q_{11}p_{10}$
2	$w_{2,01} = q_{20}p_{21}$	$w_{2,10} = q_{21}p_{20}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$w_{k,01} = q_{k0}p_{k1}$	$w_{k,10} = q_{k1}p_{k0}$
Razem	w_{01}	w_{10}

Indeks zmian wartości

$$I_w = \frac{w_{11}}{w_{00}}$$

$I_w > 1$: wzrost wartości produkcji o $(I_w - 1) \cdot 100\%$
$I_w < 1$: spadek wartości produkcji o $(1 - I_w) \cdot 100\%$

Ogólna zmiana wartości może być efektem:
zmian ilości artykułów
zmian cen jednostkowych

Indeks Laspayresa zmian ilości

$$ {}_L I_{qp} = \frac{w_{10}}{w_{00}} $$

Indeks Paaschego zmian ilości

$$ {}_P I_{qp} = \frac{w_{11}}{w_{01}} $$

Indeks Fishera zmian ilości

$$ {}_F I_q = \sqrt{{}_L I_{qp} \cdot \ {}_P I_{qp}} $$

Indeks Laspayresa zmian cen

$$ {}_{L}I_{pq} = \frac{w_{01}}{w_{00}} $$

Indeks Paaschego zmian cen

$$ {}_{P}I_{pq} = \frac{w_{11}}{w_{10}} $$

Indeks Fishera zmian cen

$$ {}_{F}I_{p} = \sqrt{{}_{L}I_{pq} \cdot \ {}_{P}I_{pq}} $$

$$ I_w = {}_{F}I_q \cdot {}_{F}I_p = {}_{P}I_{qp} \cdot {}_{L}I_{pq} = {}_{L}I_{qp} \cdot {}_{P}I_{pq} $$

Przykład. Zbadać dynamikę importu trzech towarów latach 1995 i 1998.

Towar	Ilość		Cena jednostkowa	
	1995	1998	1995	1998
A	1280	1360	108	111
B	830	890	93	101
C	1640	1660	97	107

Towar	w_{00}	w_{11}	w_{01}	w_{10}
A	138240	150960	142080	146880
B	77190	89890	83830	82770
C	159080	177620	175480	161020
	374510	418470	401390	390670

Zmiana wartości

$$I_w = \frac{w_{11}}{w_{00}} = \frac{418470}{374510} = 1.117380$$

Zmiana ilości

$$_L I_{qp} = \frac{w_{10}}{w_{00}} = \frac{390670}{374510} = 1.043150$$

$$_P I_{qp} = \frac{w_{11}}{w_{01}} = \frac{418470}{401390} = 1.042552$$

$$\begin{aligned} _F I_q &= \sqrt{_L I_{qp} \cdot \;\; _P I_{qp}} \\ &= \sqrt{1.043150 \cdot 1.042552} = 1.042851 \end{aligned}$$

Zmiana cen

$$_L I_{pq} = \frac{w_{01}}{w_{00}} = \frac{401390}{374510} = 1.071774$$

$$_P I_{pq} = \frac{w_{11}}{w_{10}} = \frac{418470}{390670} = 1.071160$$

$$\begin{aligned} _F I_p &= \sqrt{_L I_{pq} \cdot \;\; _P I_{pq}} \\ &= \sqrt{1.071774 \cdot 1.071160} = 1.071467 \end{aligned}$$

Towar	Wartość		Zmiana cen
	1995	1998	(1995 = 100)
A	138240	150960	102.78
B	77190	89890	108.60
C	159080	177620	110.31

$$w_{00} = 374510 \qquad w_{11} = 418470$$

$$\frac{p_{A1}}{p_{A0}} = 1.0278 \quad \frac{p_{B1}}{p_{B0}} = 1.0860 \quad \frac{p_{C1}}{p_{C0}} = 1.1031$$

$$\begin{aligned} w_{A,01} &= q_{A0}p_{A1} = 1.0278 \cdot q_{A0}p_{A0} \\ &= 1.0278 \cdot w_{A,00} = 1.0278 \cdot 138240 = 146880 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{A,10} &= q_{A1}p_{A0} = q_{A1} \cdot \frac{p_{A1}}{1.0278} \\ &= \frac{w_{A,11}}{1.0278} = \frac{150960}{1.0278} = 142080 \end{aligned}$$

Czas	Obserwacja	Indeksy jednopodstawowe absolutne
t_0	y_0	0
t_1	y_1	$y_1 - y_0$
t_2	y_2	$y_2 - y_0$
t_3	y_3	$y_3 - y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_k	y_k	$y_k - y_0$

Czas	Obserwacja	Indeksy jednopodstawowe względne	$i_{t\|c}$
t_0	y_0	$\cdot$	1
t_1	y_1	$(y_1 - y_0)/y_0$	y_1/y_0
t_2	y_2	$(y_2 - y_0)/y_0$	y_2/y_0
t_3	y_3	$(y_3 - y_0)/y_0$	y_3/y_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_k	y_k	$(y_k - y_0)/y_0$	y_k/y_0

Czas	Obserwacja	Indeksy łańcuchowe absolutne
t_0	y_0	0
t_1	y_1	$y_1 - y_0$
t_2	y_2	$y_2 - y_1$
t_3	y_3	$y_3 - y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_k	y_k	$y_k - y_{k-1}$

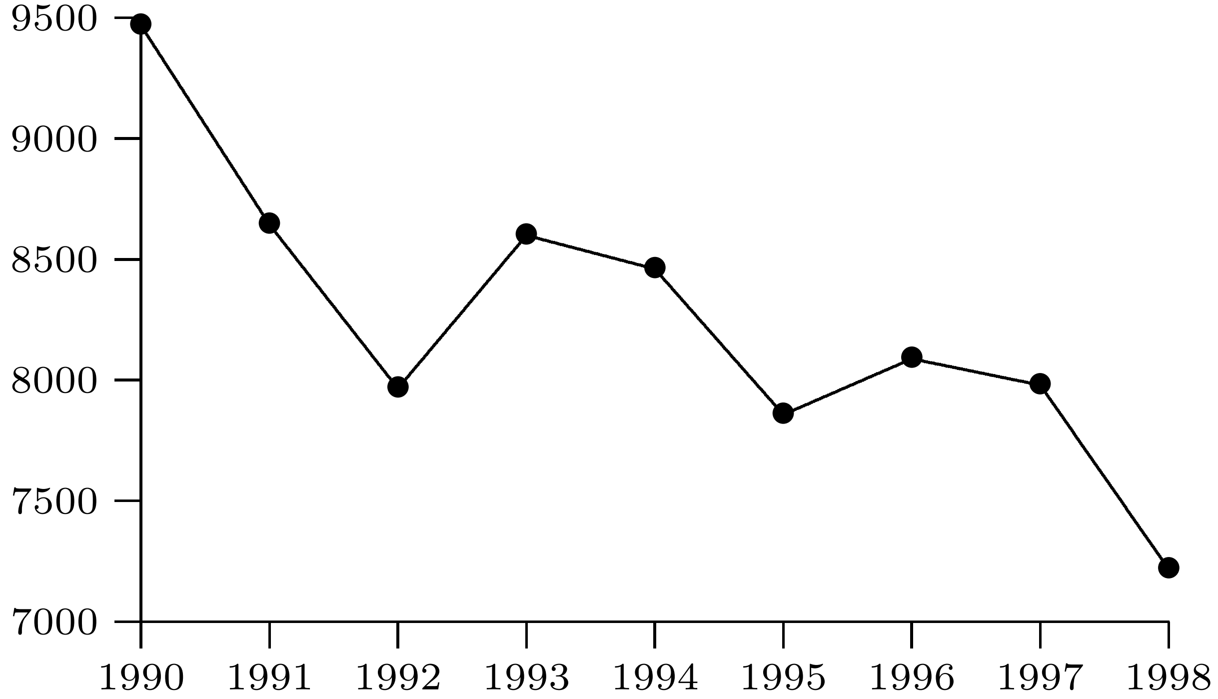
Czas	Obserwacja	Indeksy łańcuchowe względne	$i_{t\|t-1}$
t_0	y_0	$\cdot$	$\cdot$
t_1	y_1	$(y_1 - y_0)/y_0$	y_1/y_0
t_2	y_2	$(y_2 - y_1)/y_1$	y_2/y_1
t_3	y_3	$(y_3 - y_2)/y_2$	y_3/y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_k	y_k	$(y_k - y_{k-1})/y_{k-1}$	y_k/y_{k-1}

Średnie tempo zmian

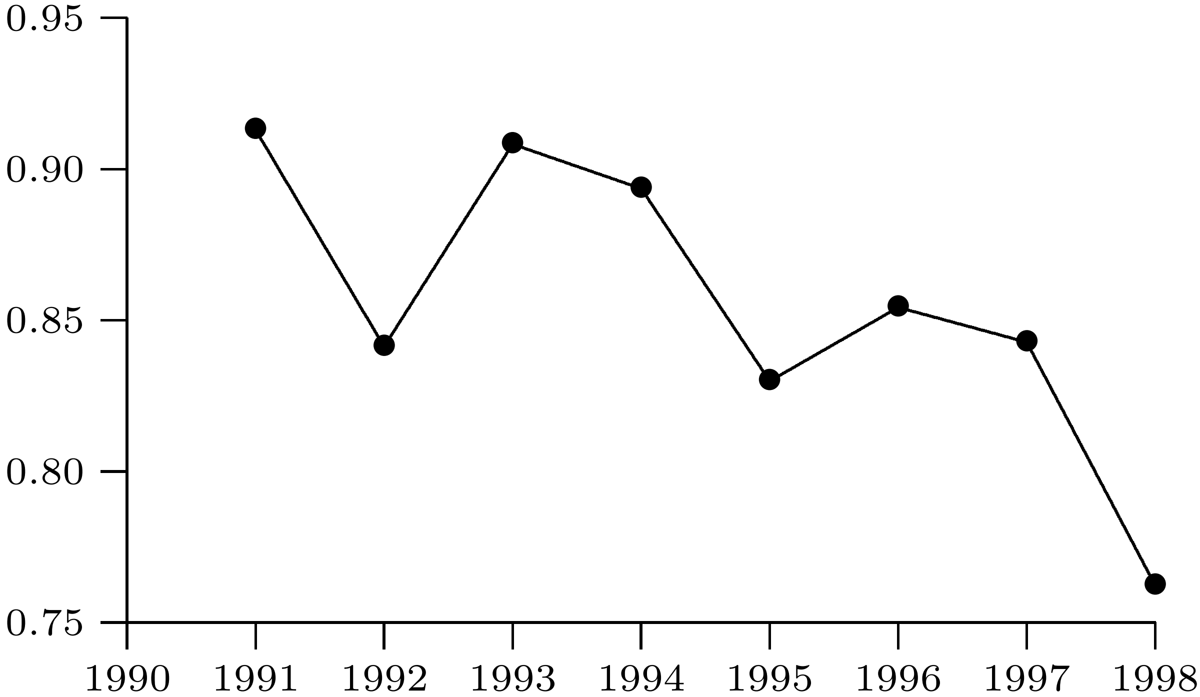
$$\bar{i}_{t|t-1} = \sqrt[k-1]{i_{1|0} i_{2|1} i_{3|2} \cdots i_{k|k-1}} = \sqrt[k-1]{y_k/y_0}$$

Przykład. Zbadać dynamikę zmian wielkości produkcji w latach 1990–1998

rok	produkcja
1990	9468
1991	8644
1992	7965
1993	8599
1994	8460
1995	7857
1996	8088
1997	7979
1998	7217



Czas	Indeksy jednopodstawowe absolutne	$i_{t\|c}$
1990		
1991	-824	0.91297
1992	-1503	0.84125
1993	-869	0.90822
1994	-1008	0.89354
1995	-1611	0.82985
1996	-1380	0.85425
1997	-1489	0.84273
1998	-2251	0.76225



Czas	Indeksy łańcuchowe	
	absolutne	$i_{t\|c}$
1990		
1991	−824	0.91297
1992	−679	0.92145
1993	634	1.07960
1994	−139	0.98384
1995	−603	0.92872
1996	231	1.02940
1997	−109	0.98652
1998	−762	0.90450

Średnie tempo zmian

$$0.91297 \cdot 0.92145 \cdot 1.07960 \cdot 0.98384 \cdot$$
$$0.92872 \cdot 1.02940 \cdot 0.98652 \cdot 0.90450 = 0.76225$$

$$\sqrt[8]{0.76225} = 0.96663$$