Zadanie 1.

$s^2 = 22{,}5 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{22{,}5} = 4{,}743$

Średnia z próby to: $\bar{x} = \dfrac{20+12+11+9+8}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$

90% przedział ufności wynosi: $\left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$

Poziom ufności: $1-\alpha = 0{,}90$, stąd $\alpha = 0{,}1$, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0{,}95,\,4} = 2{,}1318$

A zatem poszukiwany przedział ufności jest postaci:

$$\left\langle 12 - 2{,}1318 \cdot \frac{4{,}743}{\sqrt{5}}, \quad 12 + 2{,}1318 \cdot \frac{4{,}743}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$\left\langle 7{,}478, \quad 16{,}522 \right\rangle$$

Na podstawie pobranej próby możemy stwierdzić, że z prawdopodobieństwem 90% nieznana wartość oczekiwana wielkości dziennej sprzedaży towaru zawiera się między 7,478 kg a 16,522 kg.

Zadanie 2.

Przedział ufności dla frakcji (proporcji) wyliczamy wg wzoru:

$$\left\langle \hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}; \quad \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \right\rangle$$

gdzie: $\hat{p} = \dfrac{k}{n}$

U nas n = 125

k = 125 – 25 = 100 (interesują nas kierowcy, którzy <u>nie</u> mieli kolizji).

$\hat{p} = \dfrac{100}{125} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$1-\alpha = 0{,}95$

Stąd $\alpha = 0{,}05$ i $\quad 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}025 = 0{,}975$

Zatem $z_{0,975} = 1{,}96$

A zatem przedział ufności:

$$\left\langle 0{,}8-1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{125}};\quad 0{,}8+1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{125}}\right\rangle$$

$$\langle 0{,}73;\quad 0{,}87\rangle$$

Na podstawie wyników z pobranej próbki możemy twierdzić, że z prawdopodobieństwem 95% odsetek kierowców, którzy nie mieli żadnej kolizji zawiera się między 0,73 a 0,87 (między 73% a 87%).

Zadanie 3.

Przedział ufności w sytuacji, gdy badana cecha ma rozkład normalny o znanej wariancji σ^2, wówczas przedział ufności dla wartości oczekiwanej wyznaczamy ze wzoru:

$$\left\langle \bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\rangle$$

U nas:

$\bar{x} = 2400$

$\sigma^2 = 90000$, stąd $\sigma = 300$

$n = 9$

$1-\alpha = 0{,}9$, skąd $1-\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}95$.

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,95} = 1{,}6449$

Przedział ufności:

$$\left\langle 2400-1{,}6449\cdot\frac{300}{\sqrt{9}},\quad 2400+1{,}6449\cdot\frac{300}{\sqrt{9}}\right\rangle$$

$$\langle 2235{,}52;\quad 2564{,}49\rangle$$

Na podstawie wyników z pobranej próby możemy stwierdzić, że z prawdopodobieństwem 90% średni dochód pracownika firmy KLAPA zawiera się między 2235,52 zł a 2564,49 zł.

Zadanie 4.

W tym przypadku obie próby są próbami o niewielkiej liczebności i pochodzą z populacji o rozkładach normalnych o znanych wariancjach..

Przedział ufności dla różnicy średnich wyliczamy wówczas ze wzoru:

$$\left\langle (\bar{x}-\bar{y}) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}};\quad (\bar{x}-\bar{y}) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}};\right\rangle$$

$$\bar{x} = \frac{118{,}5}{5} \qquad \bar{y} = \frac{155}{6}$$

$$\bar{x} = 23{,}7 \qquad \bar{y} = 25{,}8333$$

Wobec tego:

$$\bar{x}-\bar{y} = 23{,}7 - 25{,}8333 = -2{,}1333$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}5$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}5758$$

Szukany przedział ufności:

$$\left\langle -2{,}1333 - 2{,}5758 \cdot \sqrt{\frac{(1{,}5)^2}{5}+\frac{(1{,}5)^2}{6}};\quad -2{,}1333 + 2{,}5758 \cdot \sqrt{\frac{(1{,}5)^2}{5}+\frac{(1{,}5)^2}{6}}\right\rangle$$

$$\langle -4{,}473;\quad 0{,}206\rangle$$

Na podstawie próby możemy stwierdzić, że z prawdopodobieństwem 0,99 różnica między wartościami oczekiwanymi czasów w grupie A a analogicznymi wartościami w grupie B zawiera się między –4,473 a 0,206.