Zadanie 1.

Dla rozkładu Poissona $\mu = \lambda = 2$ oraz $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2}$

Dla dostatecznie dużego *n,* na mocy Centralnego Twierdzenia $S_n \approx N(n\mu; \sqrt{n}\sigma)$, gdzie

$n\mu = 36 \cdot 2 = 72$

$\sqrt{n}\sigma = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

A zatem: $S_{36} \sim N(72; 6\sqrt{2})$.

Obliczamy prawdopodobieństwo, uwzględniając poprawkę na dyskretny charakter przybliżanego rozkładu:

$$P(S_{36} > 60) = 1 - P(S_{36} \le 60) = 1 - P\left(Z \le \frac{60 + 0,5 - 72}{6\sqrt{2}}\right) = 1 - P(Z \le -1,355) =$$

$$= 1 - \Phi(-1,355) = \Phi(1,355) = 0.912$$

Zadanie 2.

Dane: $\sigma = 450$, n=225

$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 80\right) = ?$

Dla dostatecznie dużego *n,* na mocy Centralnego Twierdzenia $S_n \approx N(n\mu; \sqrt{n}\sigma)$, a stąd

$$\overline{X} = \frac{S_n}{n} \approx N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

U nas $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{450}{15} = 30$. Zatem

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 80\right) = P\left(-80 < \overline{X} - \mu < 80\right) = P\left(\frac{-80}{30} < Z < \frac{80}{30}\right) = \Phi(2,67) - \Phi(-2,67) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(2,67) - 1 = 2 \cdot 0,9962 - 1 = 0,9924$$

Zadanie 3.

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = 4\int_0^1 x^4 dx = \frac{4}{5}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx = 4\int_0^1 x^5 dx = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{75}$$

Parametry rozkładu zmiennej losowej przybliżającej rozkład łącznego czasu montażu wynoszą:

$$n\mu = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80$$

$$\sqrt{n}\sigma = \sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{2}{75}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Wobec tego rozkład sumy S_{100} jest rozkładem normalnym $N(80;\, 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}})$.

Obliczamy zatem prawdopodobieństwo:

$$P(S_{100} \leq 82) = P\left(Z \leq \frac{82-80}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} \right) = P\left(Z \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \Phi(1{,}22) = 0{,}8888$$

Zadanie 4.

Ilość Polaków posiadających kartę kredytową zmienną losową o rozkładzie dwumianowym.

Parametry rozkładu wynoszą:

$n = 400$

$p = 0{,}25$

Dla próby o dużej liczności korzystamy z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a, na mocy którego rozkład dwumianowy przybliżamy rozkładem normalnym. Możemy przybliżenie to stosować, gdy $np \geq 5$ oraz $n(1-p) \geq 5$.

Sprawdzamy, czy są spełnione warunki przybliżenia:

$np = 400 \cdot 0{,}25 = 100 \geq 5$ – warunek spełniony,

$n(1-p) = 400 \cdot 0{,}75 = 300 \geq 5$ - warunek spełniony.

Wobec tego rozkład dwumianowy przybliżyć możemy rozkładem normalnym $N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Parametry rozkładu przybliżającego:

$np = 100$,

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Wobec tego: $S_{400} \sim N(100; 5\sqrt{3})$

Obliczamy prawdopodobieństwo, uwzględniając poprawkę na dyskretny charakter przybliżanego rozkładu:

$$P(S_{400} = 10) = P(9{,}5 \le S_{300} \le 10{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-100}{5\sqrt{3}} \le Z \le \frac{10{,}5-100}{5\sqrt{3}}\right) = P(-10{,}45 \le Z \le -10{,}33) =$$
$$= \Phi(-10{,}33) - \Phi(-10{,}45) = \Phi(10{,}45) - \Phi(10{,}33) \approx 0$$