

Imię i nazwisko..... Numer indeksu..... Numer grupy .....

1. (4 pkt) Podaj przykład trzech zbiorów  $A, B, C \subseteq \{a, b, c\}$  takich, że
- a)  $(A \cup C) \cap B \neq (A \cup B) \cap C$
- b)  $A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \setminus C$
2. (4 pkt) Udowodnij, że dla każdego  $n \geq 2$  następująca formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(a_1 \rightarrow a_2) \vee (a_2 \rightarrow a_3) \vee \dots \vee (a_{n-1} \rightarrow a_n) \vee (a_n \rightarrow a_1)$$

3. (4 pkt) Zakładając, że  $S(x)$  oznacza predykat „ $x$  jest szczęśliwy”, zaś  $Z(x)$ : „ $x$  jest zakochany” wyraż w języku logiki fakt, że
- a) Wszyscy zakochani są szczęśliwi.
- b) Są ludzie szczęśliwi, choć nie są zakochani.
4. (4 pkt) Zaneguj następujące formuły wprowadzając znak negacji do wnętrza kwantyfikatorów tak, aby pozbyć się znaków implikacji wyrażając je przez  $\vee, \wedge, \neg$ :
- a)  $\forall x \in A : P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow R(x))$
- b)  $\exists x \in A : \forall y \in B \setminus A : (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow R(x)$

W ramach uzasadnienia podaj reguły z których należało skorzystać.

5. (4 pkt) Niech  $X$  będzie zbiorem wszystkich otwartych odcinków osi rzeczywistej o końcach wymiernych. Jaka jest moc

- a) zbioru wszystkich tych podzbiorów  $X$ , w których każde dwa różne elementy są rozłączne?
- b)  $X$ ?
6. (4 pkt) Pokaż, że dla każdego  $n \geq 0$  zachodzi  $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$ .
7. (4 pkt) Podaj przykład relacji określonej w zbiorze  $\{1, 2, 3\}$ , która jest
- a) zwrotna, nieprzechodnia i antysymetryczna
- b) przechodnia, symetryczna i nie jest zwrotna
8. (4 pkt) Pokaż, że nie są relacjami równoważności następujące relacje określone na  $\mathbb{N}$
- a)  $x r_1 y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$
- b)  $x r_2 y \Leftrightarrow x \neq y + 1$
9. (4 pkt) Na ile sposobów można włożyć 9 kul ponumerowanych od 1 do 9 do dwóch urn tak, aby
- a) w każdej urnie było co najwyżej pięć kul,
- b) w pierwszej urnie suma numerów była mniejsza od sumy numerów w drugiej urnie.
10. (4 pkt.) Rzucamy dwa razy wyważoną kostką.
- a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucona suma oczek jest podzielna przez 5?
- b) Jekie jest prawdopodobieństwo tego, że na drugiej kostce wypadnie co najmniej czwórka pod warunkiem, że na pierwszej wypadła liczba podzielna przez 3?

*Uwaga: Wszystkie odpowiedzi należy krótko uzasadnić, w miarę możliwości na tej kartce.*