

Mniej więcej można się spodziewać zadań sformułowanych tak, jak na tym egzaminie sprzed 2 lat.

1. (5 pkt.) Czy dopełnienie różnicy symetrycznej dwóch zbiorów jest zawsze równe różnicy symetrycznej ich dopełnień?
2. (5 pkt.) Rozważmy zbiór  $\mathcal{M}$  macierzy kwadratowych  $n \times n$  o elementach rzeczywistych. Określmy następującą relację na  $\mathcal{M}$ :

$$(A, B) \in r \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{M} : (\det(C) \neq 0 \quad \wedge \quad B = C^{-1}AC)$$

Pokaż, że  $r$  jest relacją równoważności.

3. (4 pkt.) Zakładając, że  $p(x)$  oznacza predykat „ $x$  jest liczbą pierwszą”, a  $e(x)$ : „ $x$  jest liczbą parzystą”, wyraż w języku logiki następujące stwierdzenia:
  - a. Każdą liczbę parzystą  $\geq 4$  można przedstawić, jako sumę dwóch liczb pierwszych.
  - b. Każda liczba naturalna większa od 2 dzieli się bez reszty przez pewną liczbę pierwszą.
4. (6 pkt.) Podaj przykład zbioru i relacji na nim określonej (po jednym przykładzie do każdego z podpunktów), która jest
  - a. asymetryczna, a jednocześnie jest symetryczna.
  - b. symetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna.
  - c. niepusta i spójna, a jednocześnie jest relacją częściowego porządku.
5. (15 pkt.) Ze zbioru dwóch kul białych i dwóch czarnych losujemy dwie. Przy założeniu, że wybór każdej z czterech kul był jednakowo prawdopodobny, określ model probabilistyczny oraz oblicz prawdopodobieństwo tego, że
  - a. wylosowane kule są różnego koloru
  - b. druga z wylosowanych kul jest czarna
  - c. druga z wylosowanych kul jest czarna, pod warunkiem, że pierwsza jest czarna.
  - d. druga z wylosowanych kul jest czarna pod warunkiem, że pierwsza jest biała.
  - e. z wylosowanych kul wylosujemy w kolejnym losowaniu kulę czarną pod warunkiem, że nie wylosowaliśmy za pierwszym razem dwóch kul białych.
6. (nadobowiązkowe) Rozważmy zbiór  $\mathbb{N}$ . Określmy relacje równoważności  $\rho$  i  $\sigma$  na  $\mathbb{N}$ :

$$x\rho y \Leftrightarrow 12|(x - y), \quad x\sigma y \Leftrightarrow 15|(x - y),$$

- a. Czy relacja  $\rho \cap \sigma$  jest relacją równoważności?
- b. Czy relacja  $\rho\sigma$  jest relacją równoważności?
- c. Czy relacja  $\rho \cup \sigma$  jest relacją równoważności?
- d. Ile elementów ma zbiór  $\mathbb{N}/(\rho \cap \sigma)$ ?