Zliczanie

1. W zbiorze A można określić 4096 relacji zwrotnych. Jaka jest moc tego zbioru?
2. W pewnym zbiorze X można określić 64 różne relacje symetryczne. Ile relacji binarnych można określić w tym zbiorze?
3. Ile można określić relacji równoważności w 5-elementowym zbiorze studentów kierunku informatyka?
4. W pewnym zbiorze można określić 1024 relacje symetryczne. Ile można w tym samym zbiorze zdefiniować relacji równoważności?
5. Na ile sposobów możemy rozdać 6 różnych zabawek trójce dzieci, tak aby każde z nich dostało co najmniej jedną zabawkę?
6. Ile jest funkcji odwzorowujących zbiór liczb naturalnych mniejszych niż 33 i podzielnych przez cztery na zbiór liczb naturalnych mniejszych niż 33 i podzielnych przez osiem.
7. Ile istnieje odwzorowań wzajemnie jednoznacznych ze zbioru A do zbioru B, gdy $A = \{a : a$ jest liczbą naturalną, podzielną przez 3, większą od zera i mniejszą niż $20\}$, $B = \{b : b$ jest liczbą naturalną, podzielną przez 2, większą od zera i mniejszą niż $13\}$.
8. Oblicz ile elementów ma zbiór A jeśli wiadomo, że istnieje 14 funkcji odwzorowujących zbiór A na zbiór $\{0, 1\}$.
9. Ile istnieje funkcji rosnących $f : \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ dla $k \leqslant n$?
10. W grupie 500 studentów: 300 uczy się francuskiego, 200 uczy się niemieckiego, 50 uczy się angielskiego, 20 uczy się francuskiego i angielskiego, 30 uczy się niemieckiego i angielskiego, 20 uczy się niemieckiego i francuskiego, 20 uczy się wszystkich trzech języków. Ilu studentów uczy się (a) dokładnie dwóch języków, (b) co najmniej dwóch języków, (c) dokładnie jednego języka?
11. W grupie trzydziestu uczniów: 19 lubi matematykę, 17 lubi geografię, 11 lubi historię, 12 lubi matematykę i geografię, 7 lubi matematykę i historię, 5 lubi geografię i historię, 2 lubi wszystkie trzy wymienione przedmioty. Ilu uczniów lubi (a) dokładnie jeden z wymienionych przedmiotów, (b) dokładnie dwa z wymienionych przedmiotów, (c) nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów?
12. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, ..., 1500\}$ (a) podzielnych przez 4 i 6; (b) podzielnych przez 4 lub 6; (c) podzielnych przez 4 lub 3 i nie podzielnych przez 6.
13. Oblicz ile jest liczb dodatnich mniejszych niż 1000 i (a) podzielnych przez 3, 5 i 7; (b) podzielnych przez 3, 5, lub 7; (c) podzielnych przez 3, 5, lub 7, ale nie podzielnych przez 21.
14. Stwierdzono, że suma lat 15 uczestników pewnego spotkania wynosi 152. Czy jest prawdą, że muszą wśród tych 15 osób istnieć co najmniej 4, których suma lat wynosi co najmniej 42? Odpowiedź uzasadnij.
15. Niech A będzie ustalonym podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, ..., 150\}$ złożonym z 25 liczb. Sprawdź, czy jest prawdą, że muszą istnieć trzy rozłączne pary elementów zbioru A, których suma jest taka sama (np. $\{4, 5\}$ i $\{1, 8\}$).
16. Grupa złożona z 10 studentów chce utworzyć 5 zespołów roboczych w taki sposób, by każdy student należał do dokładnie 3 zespołów. Sprawdź, czy jest prawdą, że średnia liczebność zespołu będzie musiała wynosić 6? Odpowiedź uzasadnij.
17. Angielski alfabet składa się z 21 spółgłosek i 5 samogłosek. Sprawdź, czy prawdą jest, że niezależnie od tego, w jakim porządku zostaną wypisane litery alfabetu angielskiego, to zawsze znajdą się 4 spółgłoski, które wystąpią kolejno jedna po drugiej?
18. Niech $a_1, a_2, \dots, a_p$ będą liczbami całkowitymi, niekoniecznie różnymi. Sprawdź, czy jest prawdą, że suma pewnych spośród nich jest wielokrotnością liczby p.