Teoria grafów II

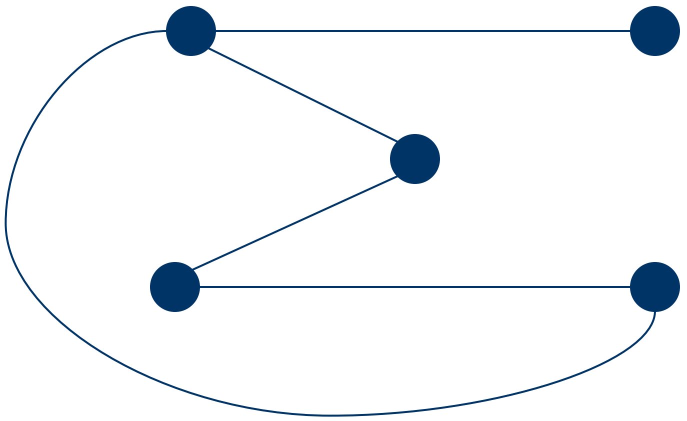
Materiały pomocnicze do wykładu

wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Graf planarny

Graf planarny

Graf, który może być narysowany tak, by uniknąć przecinania się krawędzi, nazywamy **grafem planarnym.**



Izomorfizm grafów

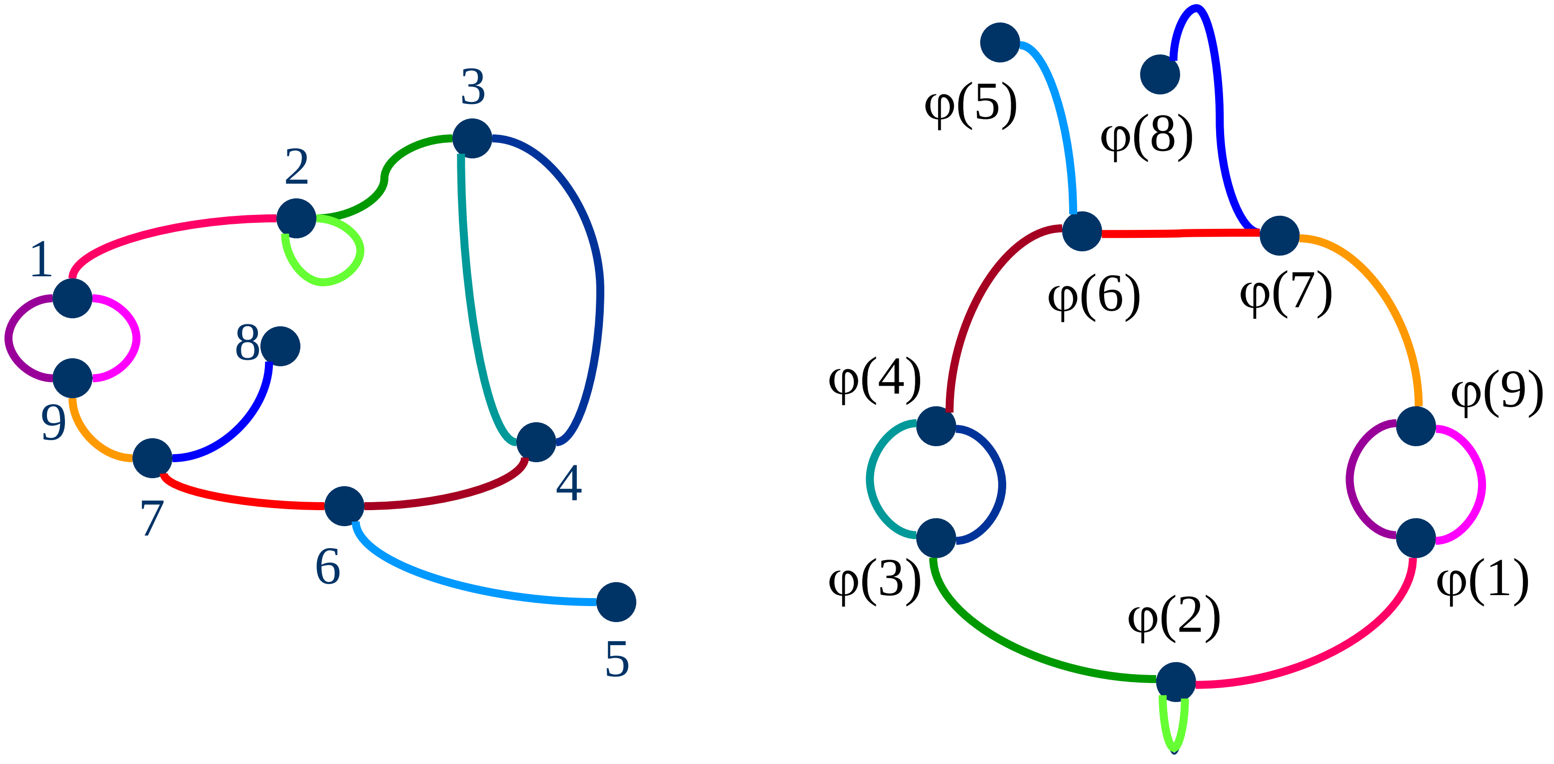
Grafy izomorficzne

Izomorfizmem

grafu G na graf H nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne φ :V(G) $\rightarrow$ V(H) takie, że (u,v) jest krawędzią grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy (φ(u), φ(v)) jest krawędzią w grafie H.

Dwa grafy G i H są **izomorficzne** jeśli istnieje izomorfizm a z jednego grafu na drugi.

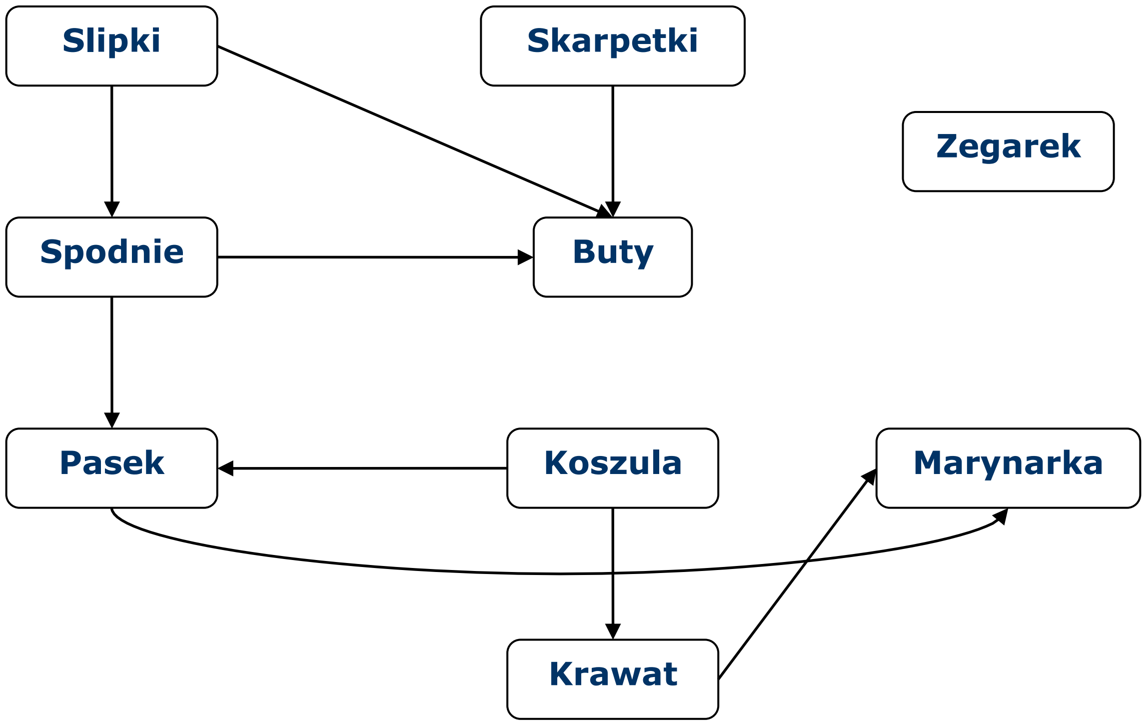
Grafy izomorficzne - przykład



Algorytmy przeszukujące grafy

Algorytmy przeszukujące grafy w głąb

Jak się ubierać?



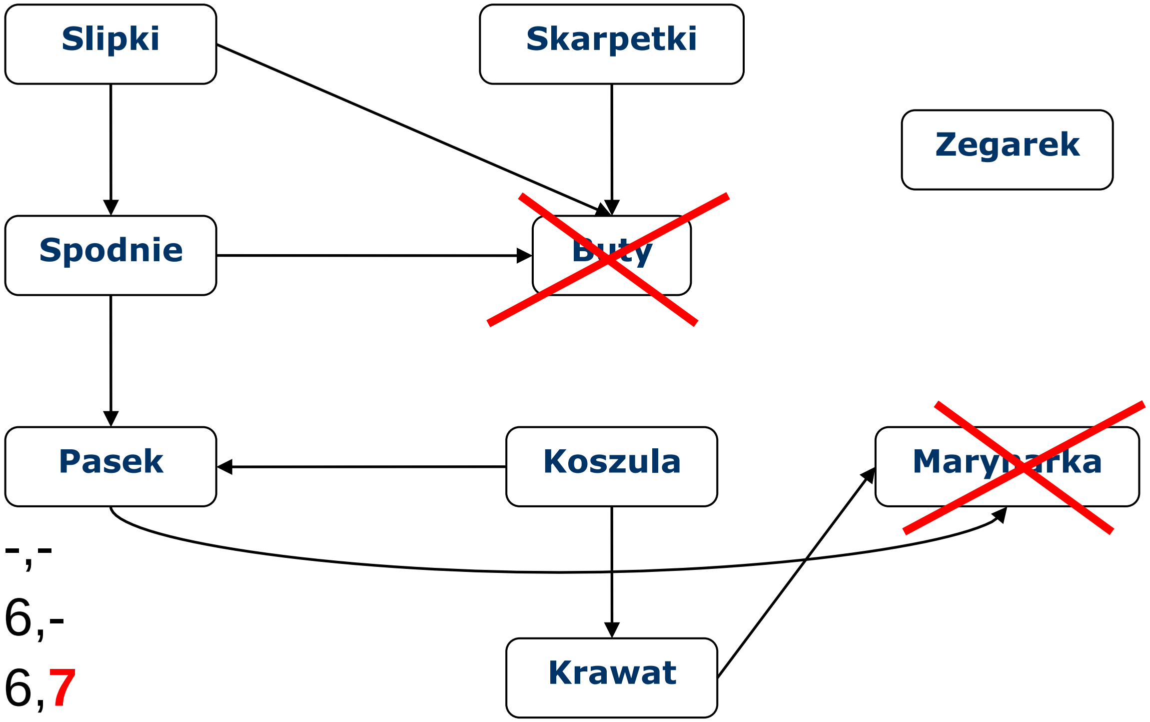
Algorytm przeszukiwania w głąb

Dopóki w grafie istnieje wierzchołek biały **v** to:

1. zapamiętaj wierzchołek **v,**
2. weź **<u>ostatni</u>** zapamiętany wierzchołek, niech będzie to **w** i zaznacz go kolorem szarym (czas wejścia),
3. zapamiętaj wszystkie białe wierzchołki sąsiednie z wierzchołkiem **w** (w ustalonej kolejności) i jeżeli takie istnieją to przejdź do punktu 2,
4. zaznacz wierzchołek **w** kolorem czarnym (czas wyjścia),
5. zapomnij o wierzchołku **w**.

Algorytm przeszukiwania w głąb

sl,-,-
sl,1,-
sl,1,- sp,-,- b,-,-
sl,1,- sp,-,- b,2,-
sl,1,- sp,-,- b,2,**3**
sl,1,- sp,-,-
sl,1,- sp,4,-
sl,1,- sp,4,- pa,-,-
sl,1,- sp,4,- pa,5,-
sl,1,- sp,4,- pa,5,- m,-,-
sl,1,- sp,4,- pa,5,- m,6,-
sl,1,- sp,4,- pa,5,- m,6,**7**



Algorytm przeszukiwania w głąb

sl,1,- sp,4,- pa,5,- m,6,**7**

sl,1,- sp,4,- pa,5,-

sl,1,- sp,4,- pa,5,**8**

sl,1,- sp,4,-

sl,1,- sp,4,**9**

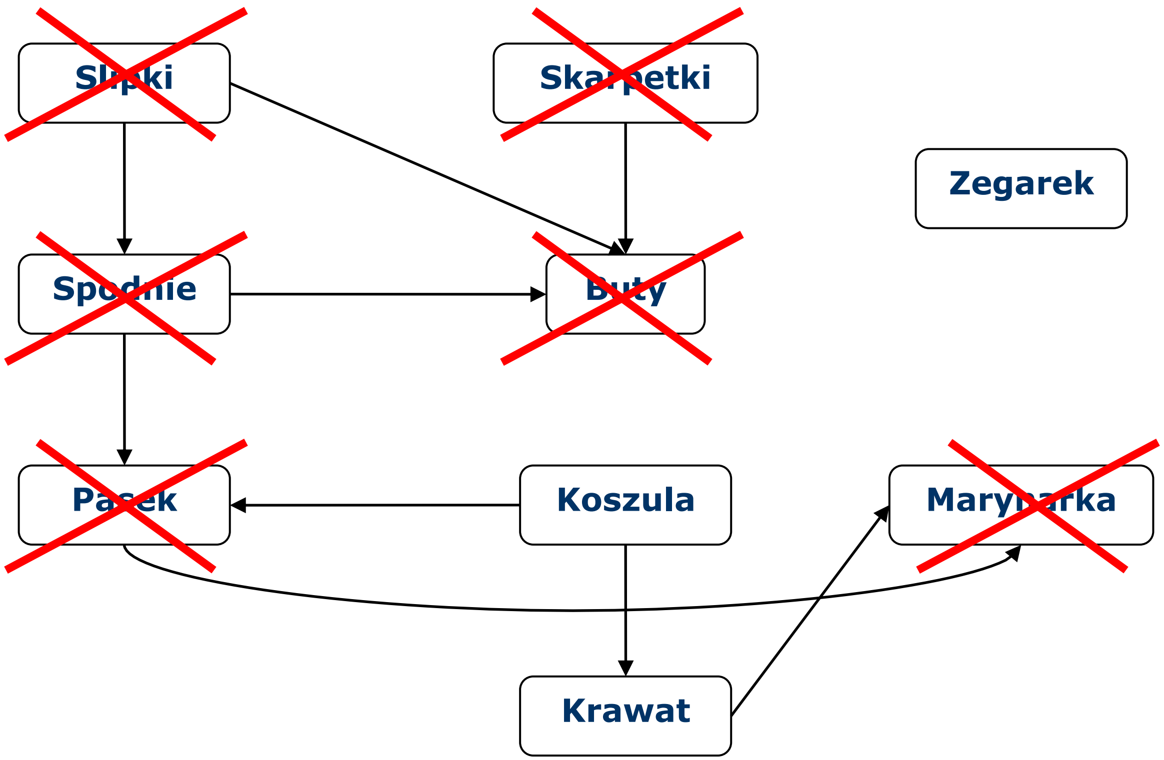
sl,1,-

sl,1,**10**

sk,-,-

sk,11,-

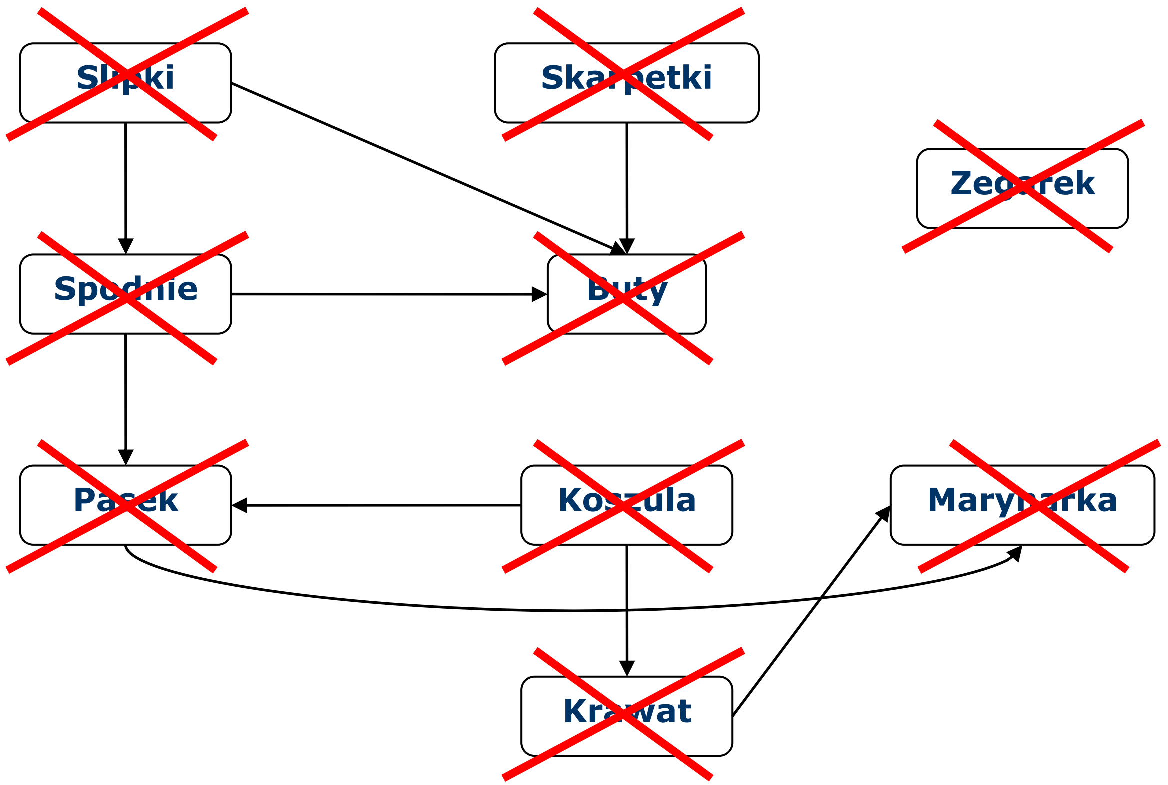
sk,11,**12**



Algorytm przeszukiwania w głąb

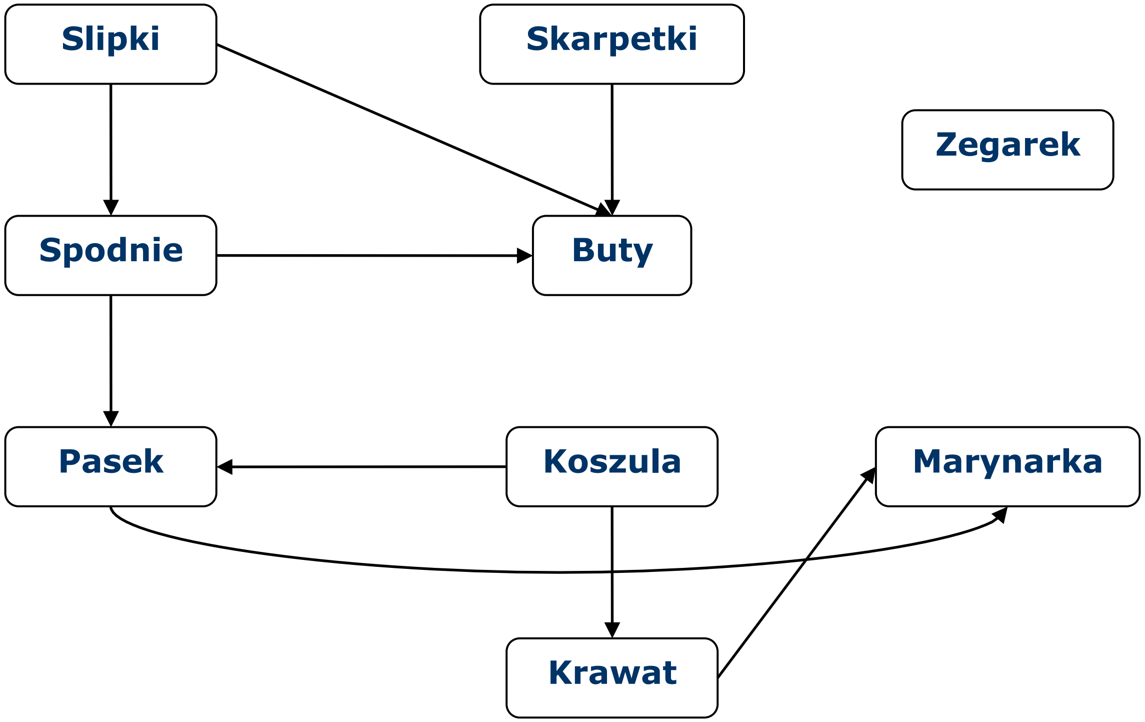
ko,-,-
ko,13,-
ko,13,- kr,-,-
ko,13,- kr,14,-
ko,13,- kr,14,**15**
ko,13,-
ko,13,**16**

z,-,-
z,17,-
z,17,**18**



Algorytm przeszukiwania w głąb

Zegarek
Koszula
Krawat
Skarpetki
Slipki
Spodnie
Pasek
Marynarka
Buty



Algorytmy przeszukujące grafy wszerz

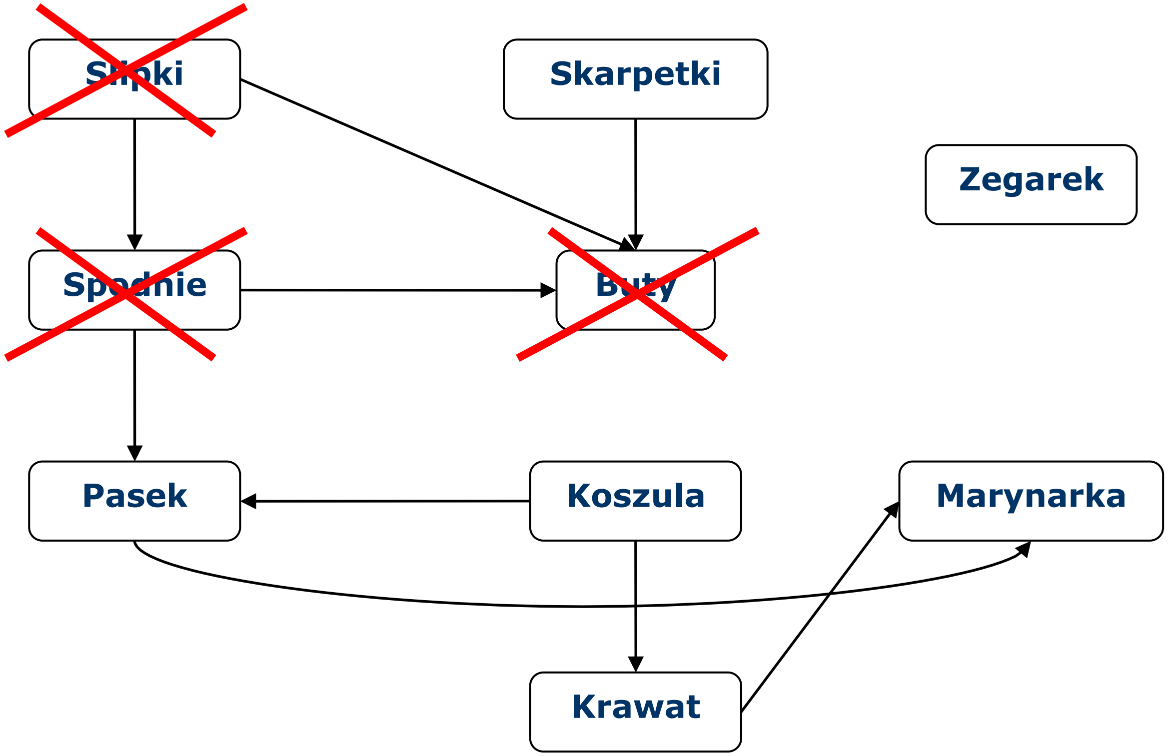
Algorytm przeszukiwania wszerz

Zakładamy, że każdy wierzchołek możemy pokolorować na biało, szaro i czarno oraz, że na początku wszystkie są białe. Dopóki w grafie istnieje wierzchołek biały v to:

1. zapamiętaj wierzchołek v,
2. weź **pierwszy** zapamiętany wierzchołek, niech będzie to w i zaznacz go kolorem szarym (czas wejścia),
3. zapamiętaj wszystkie białe wierzchołki sąsiednie z wierzchołkiem w (w ustalonej kolejności),
4. zaznacz wierzchołek w kolorem czarnym (czas wyjścia),
5. zapomnij o wierzchołku w i przejdź do punktu 2.

Algorytm przeszukiwania wszerz

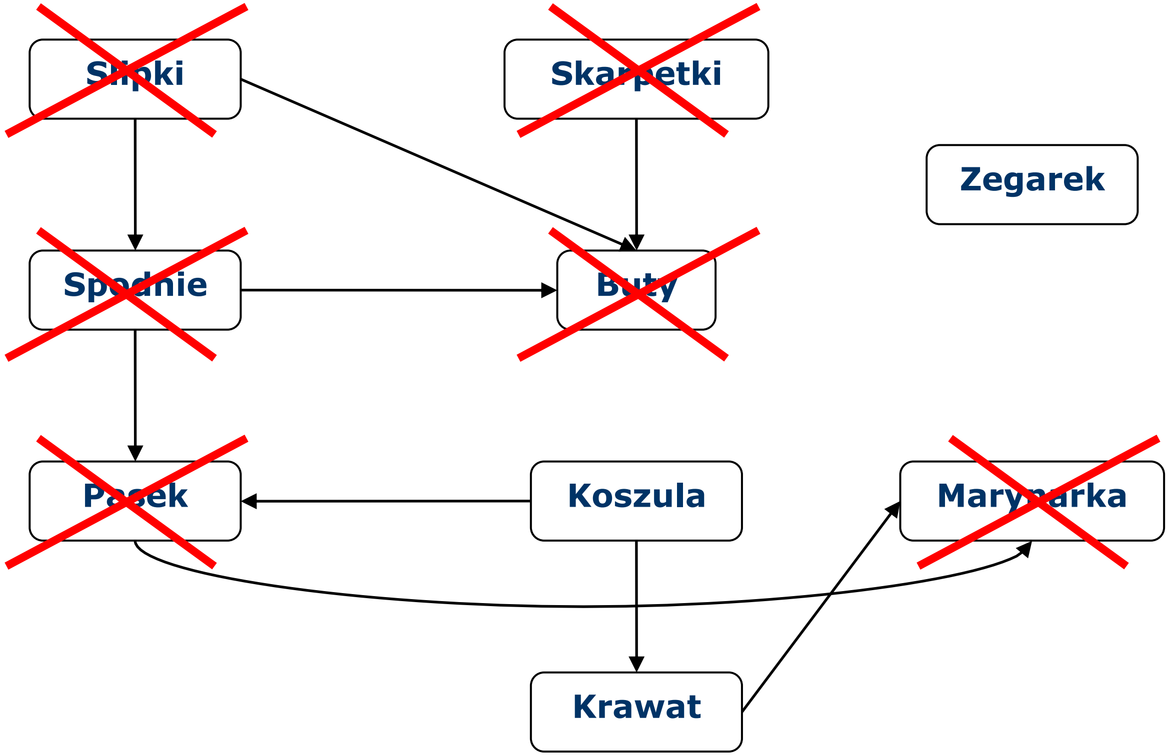
sl,-,-
sl,1,-
sl,1,- sp,-,- b,-,-
sl,1,**2** sp,-,- b,-,-
sp,-,- b,-,-
sp,3,- b,-,-
sp,3,- b,-,- p,-,-
sp,3,**4** b,-,- p,-,-
b,-,- p,-,-
b,5,- p,-,-
b,5,**6** p,-,-
p,-,-



Algorytm przeszukiwania wszerz

p,-,-
p,7,-
p,7,- m,-,-
p,7,**8** m,-,-
m,-,-
m,9,-
m,9,**10**

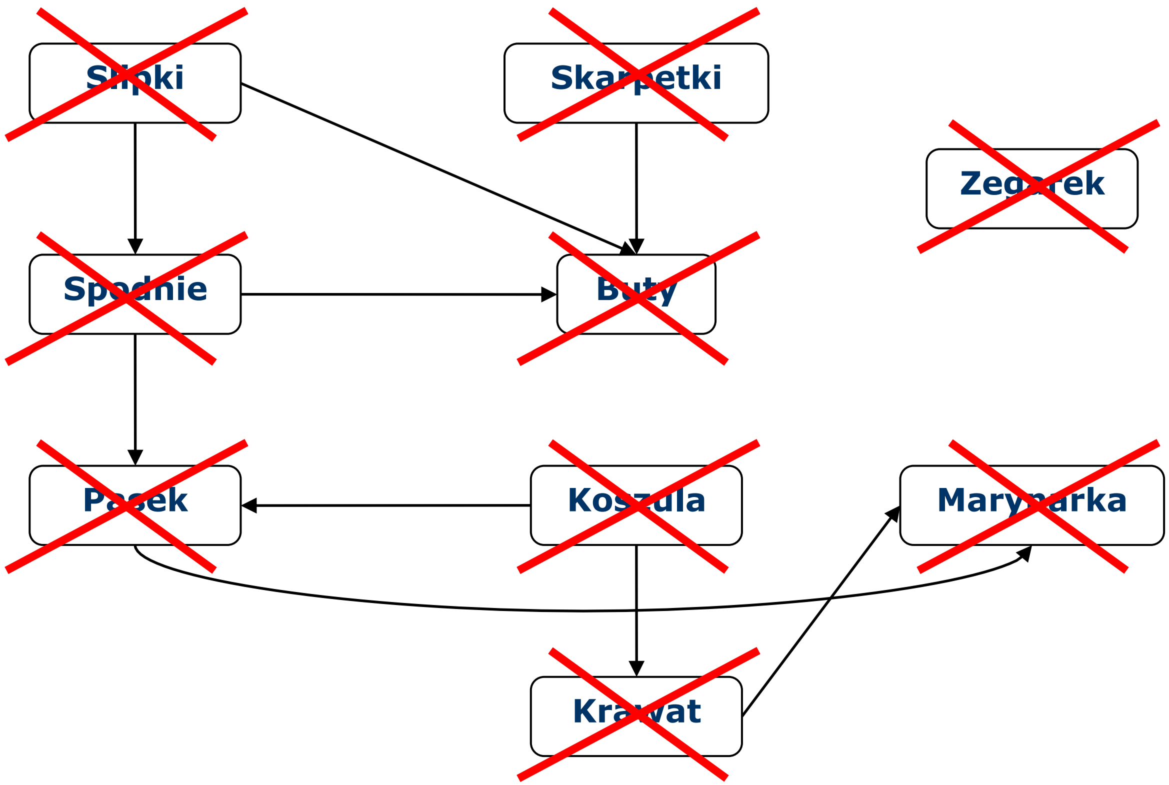
sk,-,-
sk,11,-
sk,11,**12**



Algorytm przeszukiwania wszerz

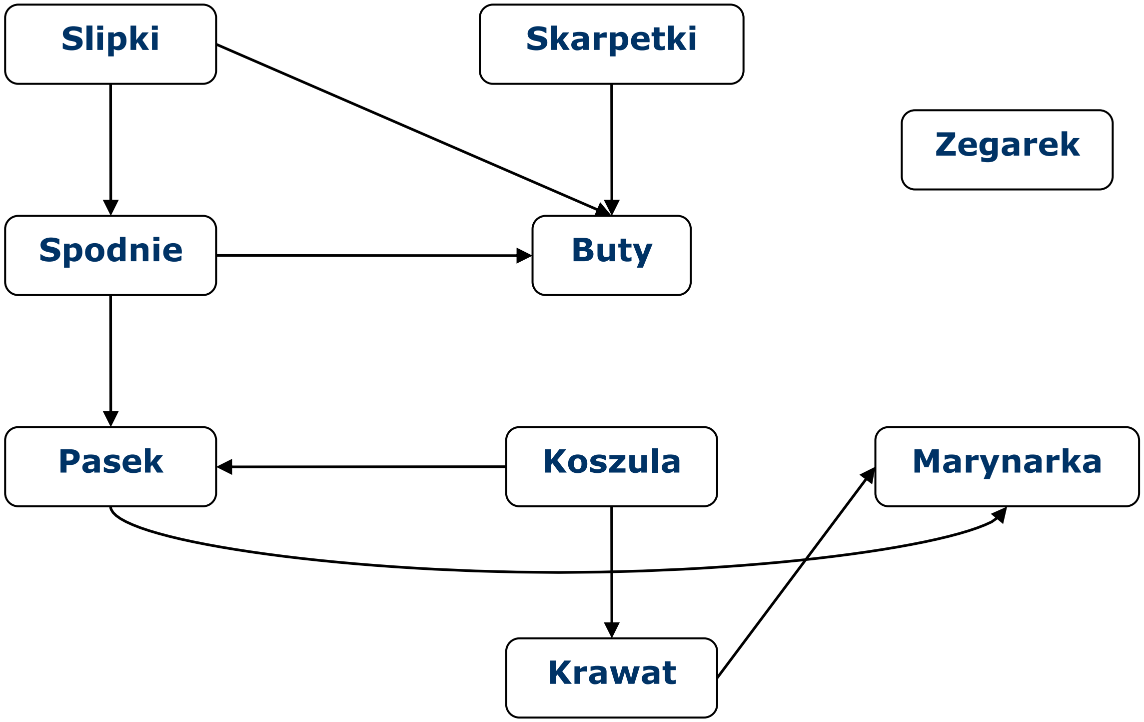
ko,-,-
ko,13,-
ko,13,- kr,-,-
ko,13,**14** kr,-,-
kr,-,-
kr,15,-
kr,15,**16**

z,-,-
z,17,-
z,17,**18**



Algorytm przeszukiwania wszerz

Slipki
Spodnie
Buty
Pasek
Marynarka
Skarpetki
Koszula
Krawat
Zegarek



Grafy z wagami

Graf skierowany z wagami

Graf skierowany bez krawędzi wielokrotnych nazywamy

grafem skierowanym z wagami,

jeśli każdej krawędzi jest przyporządkowana pewna liczba, nazywana **wagą** tej krawędzi.

W konkretnych zastosowaniach może ona być nazywana „kosztem”, „długością”, „pojemnością” itp.

Waga krawędzi i drogi

Wagi krawędzi w grafie skierowanym G będą wartościami pewnej funkcji W o dziedzinie E(G) i wartościach w zbiorze R.

Wagą drogi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w grafie G nazwiemy sumę

$$\sum_{i=1,..,n} W(e_i),$$

gdzie $W(e_i)$ jest wagą krawędzi e_i.

Waga i droga minimalna

Najmniejszą wagę drogi (długości co najmniej 1) prowadzącej z wierzchołka u do wierzchołka v będziemy nazywać

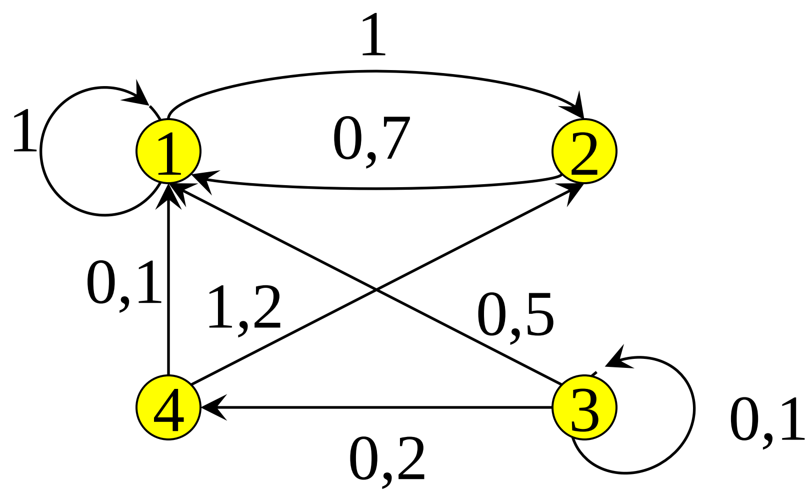
waga minimalną

z u do v i oznaczać symbolem W*(u,v).

Drogę z u do v, mającą minimalną wagę, będziemy nazywać

drogą minimalną.

Przykład



W	1	2	3	4
1	1	1	∞	∞
2	0,7	∞	∞	∞
3	0,5	∞	0,1	0,2
4	0,1	1,2	∞	∞

W*	1	2	3	4
1	1	1	∞	∞
2	0,7	**1,7**	∞	∞
3	**0,3**	**1,3**	0,1	0,2
4	0,1	**1,1**	∞	∞

Zastosowania

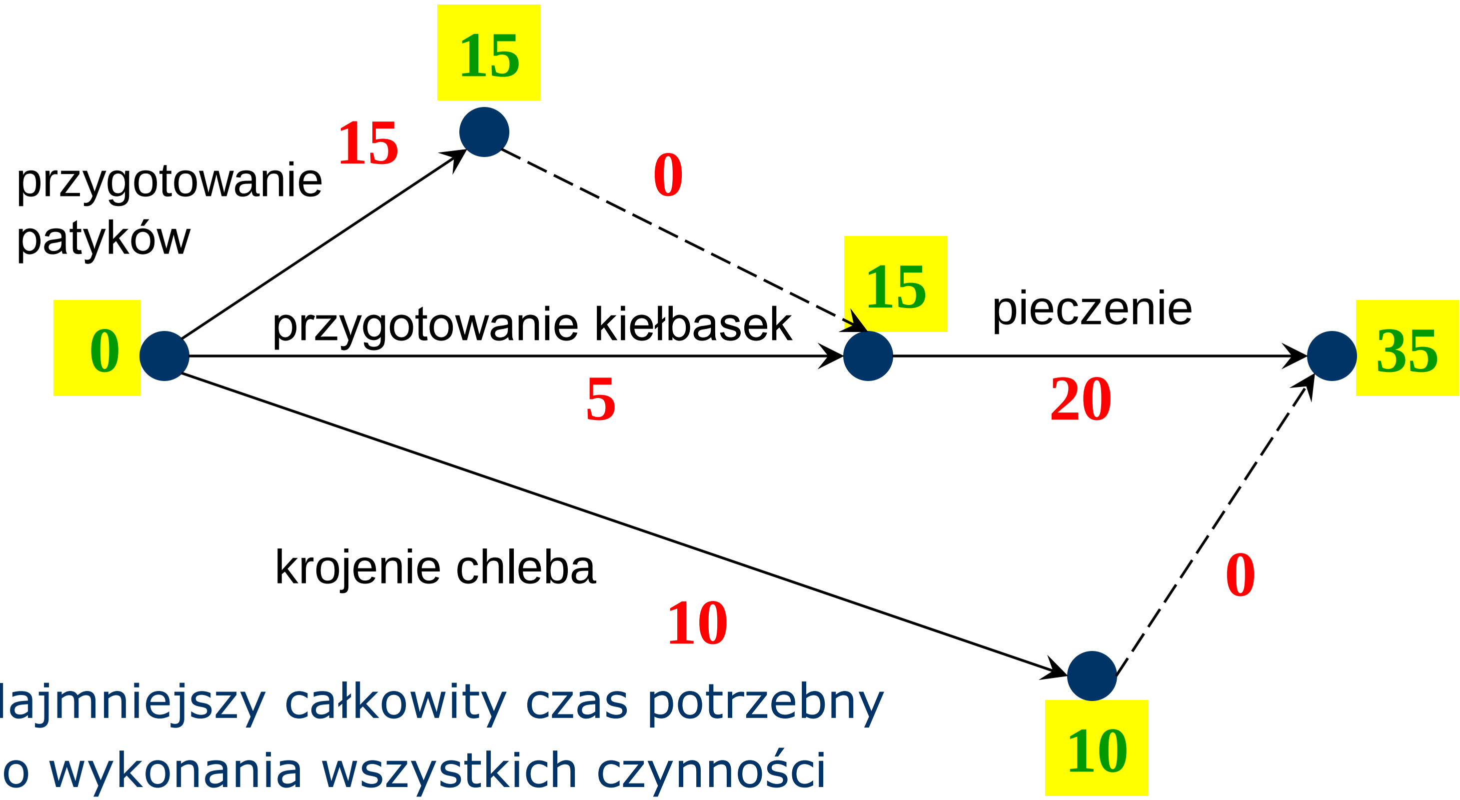
Szeregowanie zadań

Pieczenie kiełbasek

- przygotowanie patyków,
- przygotowanie kiełbasek,
- krojenie chleba,
- pieczenie kiełbasek

Jaki jest najmniejszy całkowity czas potrzebny do wykonania wszystkich czynności?

Pieczenie kiełbasek



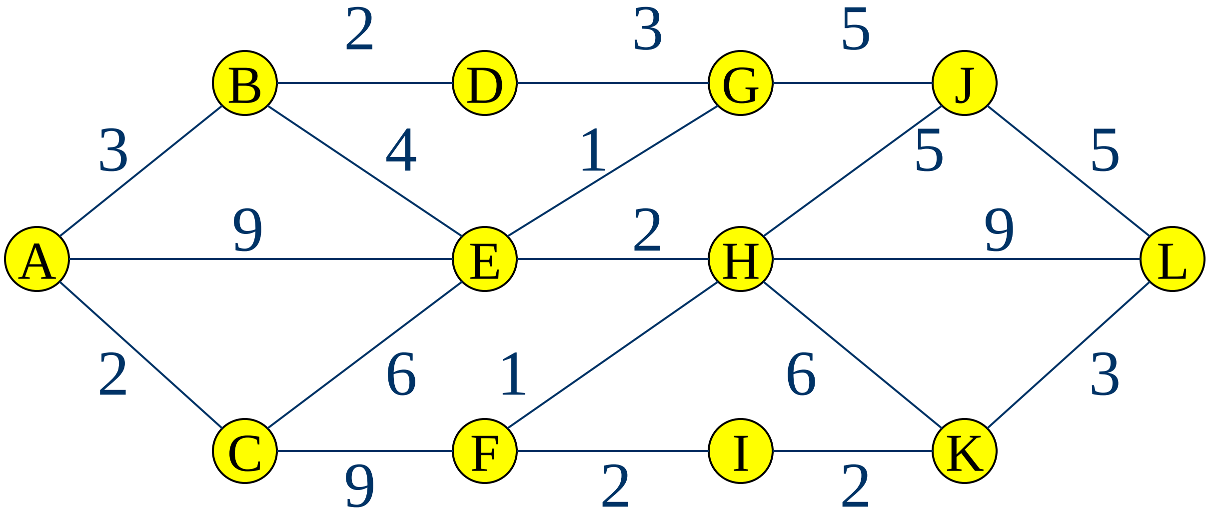
Najmniejszy całkowity czas potrzebny do wykonania wszystkich czynności wynosi 35 min.

Zagadnienie najkrótszej drogi

Szukanie najkrótszej drogi

Poniższy graf prezentuje pewną mapę. Wierzchołki tego grafu oznaczają miasta, krawędzie oznaczają drogi łączące te miasta, a wagi oznaczają długości dróg (lub czas przejazdu lub koszt przejazdu).

Jaka jest najkrótsza droga z miasta A do miasta L?



Szukanie najkrótszej drogi

Algorytm Dijkstry

{Dane: graf skierowany bez pętli i krawędzi wielokrotnych, którego zbiorem wierzchołków jest {1,...,n}, funkcja W wag krawędzi o wartościach nieujemnych}

{Wynik: wagi minimalne W*(1,j) dla j=2,...,n}

{Zmienne pomocnicze: zbiory L, V oraz funkcja D}

Szukanie najkrótszej drogi

Niech $L := \emptyset$ oraz $V := \{2,..,n\}$.

Dla $i \in V$ wykonuj

  $D(i) := W(1,i)$

Dopóki $V \setminus L \neq \emptyset$, wykonuj

  wybierz $k \in V \setminus L$ o najmniejszej wartości $D(k)$

  dołącz k do zbioru L

  dla każdego $j \in V \setminus L$ wykonuj

    jeśli $D(j) > D(k) + W(k,j)$, to

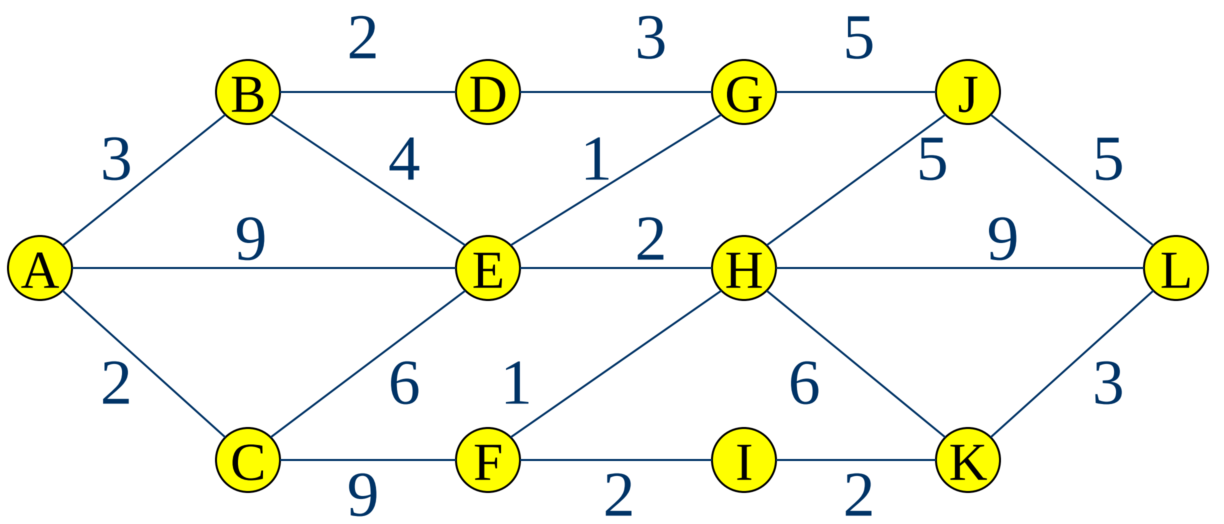
      zastąp $D(j)$ sumą $D(k) + W(k,j)$.

Dla $j \in V$ wykonuj

$W^*(1,j) := D(j)$.

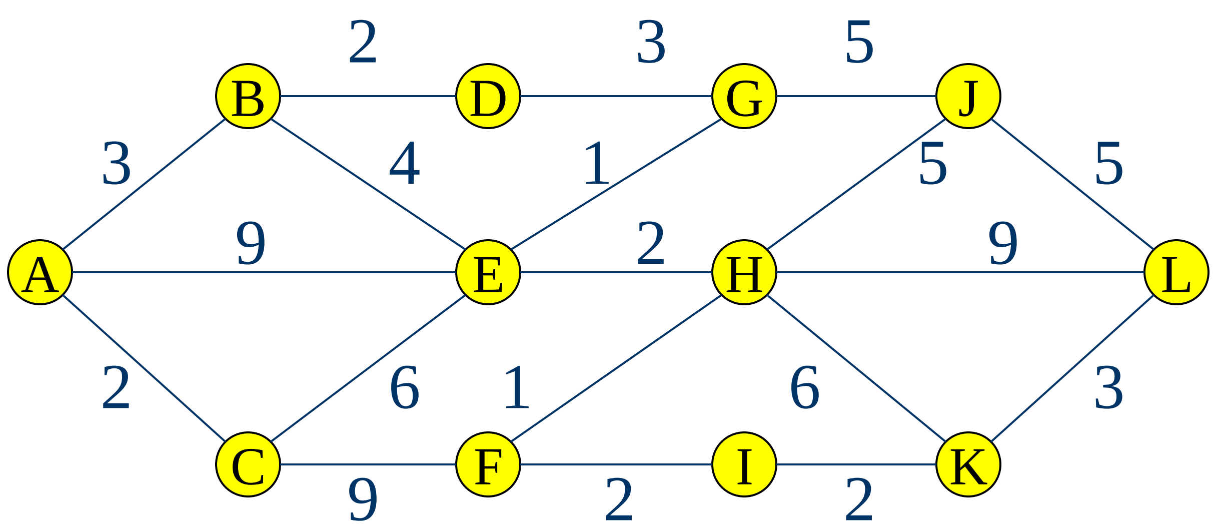
Szukanie najkrótszej drogi

L	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
∅	3	2	-	9	-	-	-	-	-	-	-
$L \cup \{C\}$	3	2	-	8	11	-	-	-	-	-	-
$L \cup \{B\}$	3	2	5	7	11	-	-	-	-	-	-



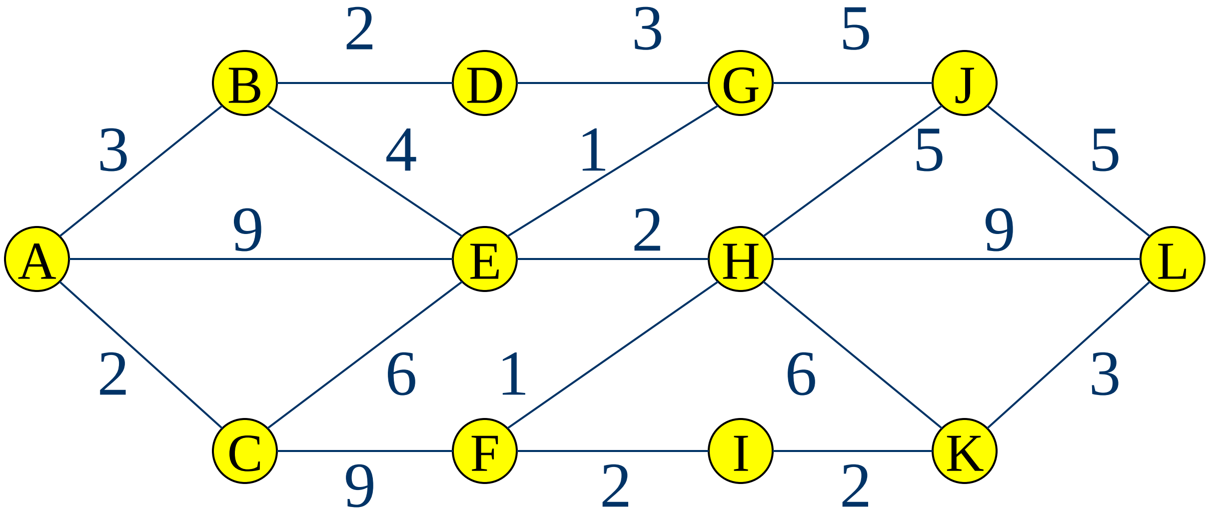
Szukanie najkrótszej drogi

L	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
L∪{B}	3	2	5	7	11	-	-	-	-	-	-
L∪{D}	3	2	5	7	11	8	-	-	-	-	-
L∪{E}	3	2	5	7	11	8	9	-	-	-	-
L∪{G}	3	2	5	7	11	8	9	-	13	-	-



Szukanie najkrótszej drogi

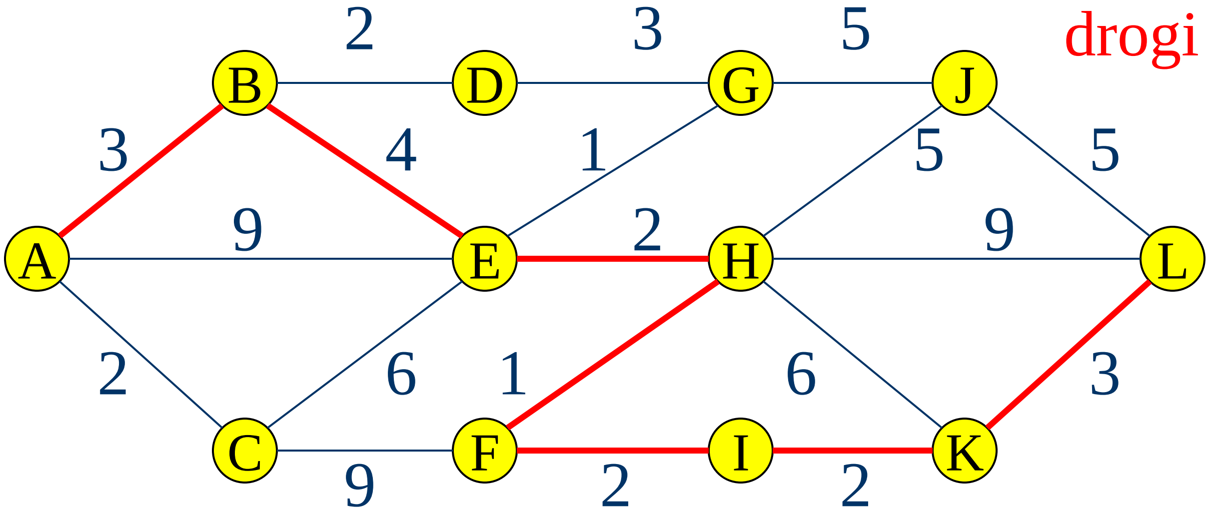
L	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
L∪{G}	3	2	5	7	11	8	9	-	13	-	-
L∪{H}	3	2	5	7	10	8	9	-	13	15	18
L∪{F}	3	2	5	7	10	8	9	12	13	15	18
L∪{I}	3	2	5	7	10	8	9	12	13	14	18



Szukanie najkrótszej drogi

L	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
L∪{I}	3	2	5	7	10	8	9	12	13	14	18
L∪{J}	3	2	5	7	10	8	9	12	13	14	17
L∪{K}	3	2	5	7	10	8	9	12	13	14	17

Waga najkrótszej drogi to 17



Zadanie chińskiego listonosza

Zadanie chińskiego listonosza

Jest to zadanie postawione przez chińskiego matematyka Mei-Ku Kwana. Polega ono na tym, by listonosz, który musi doręczyć pocztę, przeszedł jak najkrótszą łączną drogę i powrócił do punktu wyjścia. Musi on przejść przez każda ulicę i unikać przechodzenia przez te same ulice kilka razy.

Sformułowanie problemu w języku teorii grafów

Graf odpowiada sieci ulic, a waga każdej krawędzi jest długością odpowiedniej ulicy. Zadanie polega na znalezieniu takiej trasy zamkniętej, która całkowita waga jest minimalna i w której każda krawędź występuje co najmniej jeden raz.

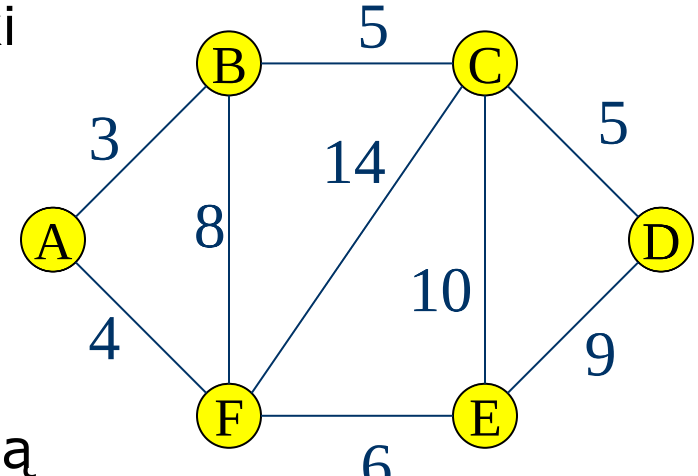
Jeśli graf jest eulerowski, to każdy cykl jest żądana trasą zamkniętą.

Przykład

- W tym szczególnym przypadku mamy do czynienia z grafem, w którym dokładnie 2 wierzchołki B i E mają stopień nieparzysty.

- Możemy zatem wskazać drogę Eulera od B do E.

- Następnie wskazujemy najkrótszą drogę od E do B: E-F-A-B.



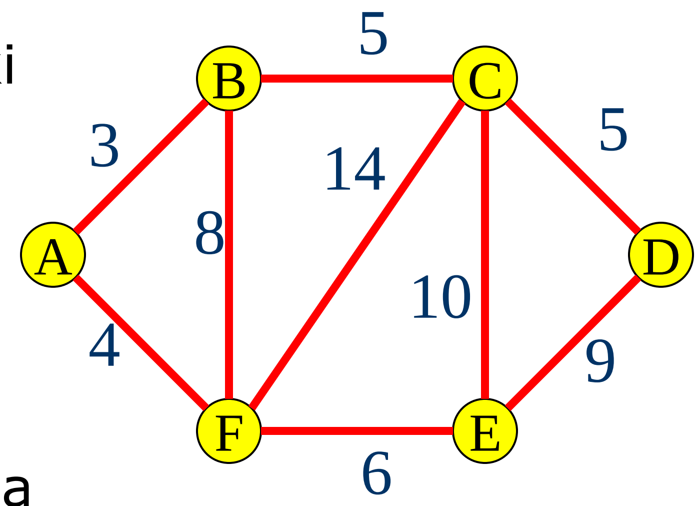
- Szukana droga jest połączeniem drogi Eulera z najkrótsza ścieżką. Jej długość, to 77.

Przykład

- W tym szczególnym przypadku mamy do czynienia z grafem, w którym dokładnie 2 wierzchołki B i E mają stopień nieparzysty.

- Możemy zatem wskazać drogę Eulera od B do E.

- Następnie wskazujemy najkrótszą drogę od E do B: E-F-A-B.



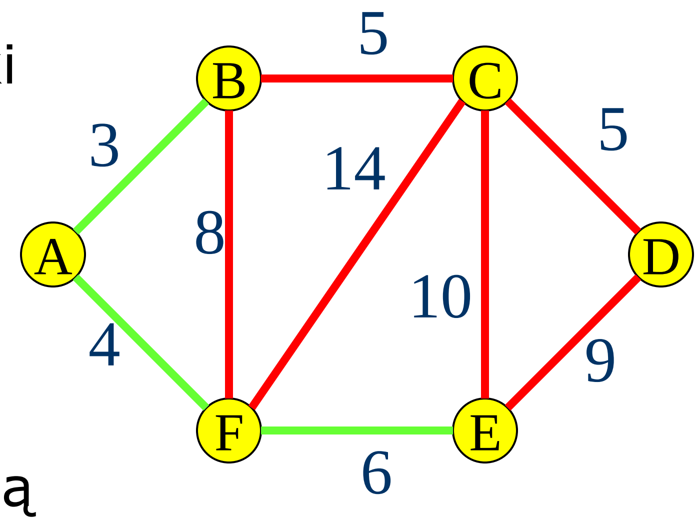
- Szukana droga jest połączeniem drogi Eulera z najkrótsza ścieżką. Jej długość, to 77.

Przykład

- W tym szczególnym przypadku mamy do czynienia z grafem, w którym dokładnie 2 wierzchołki B i E mają stopień nieparzysty.

- Możemy zatem wskazać drogę Eulera od B do E.

- Następnie wskazujemy najkrótszą drogę od E do B: E-F-A-B.



- Szukana droga jest połączeniem drogi Eulera z najkrótsza ścieżką. Jej długość, to 77.

Problem komiwojażera

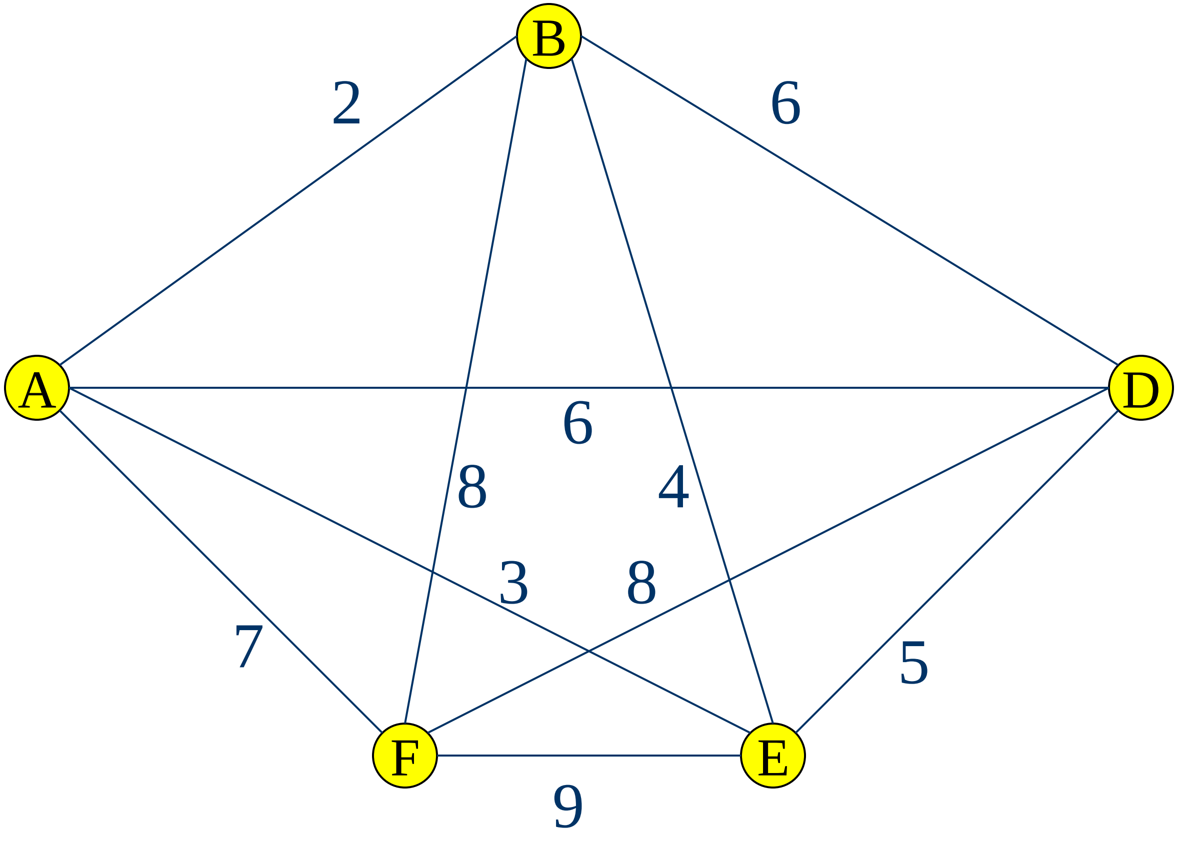
Problem komiwojażera

Komiwojażer ma do odwiedzenia pewną liczbę miast. Chciałby dotrzeć do każdego z nich i wrócić do miasta, z którego wyruszył. Dane są również odległości między miastami. Jak powinien zaplanować trasę podróży, aby w sumie przebył możliwie najkrótsza drogę?

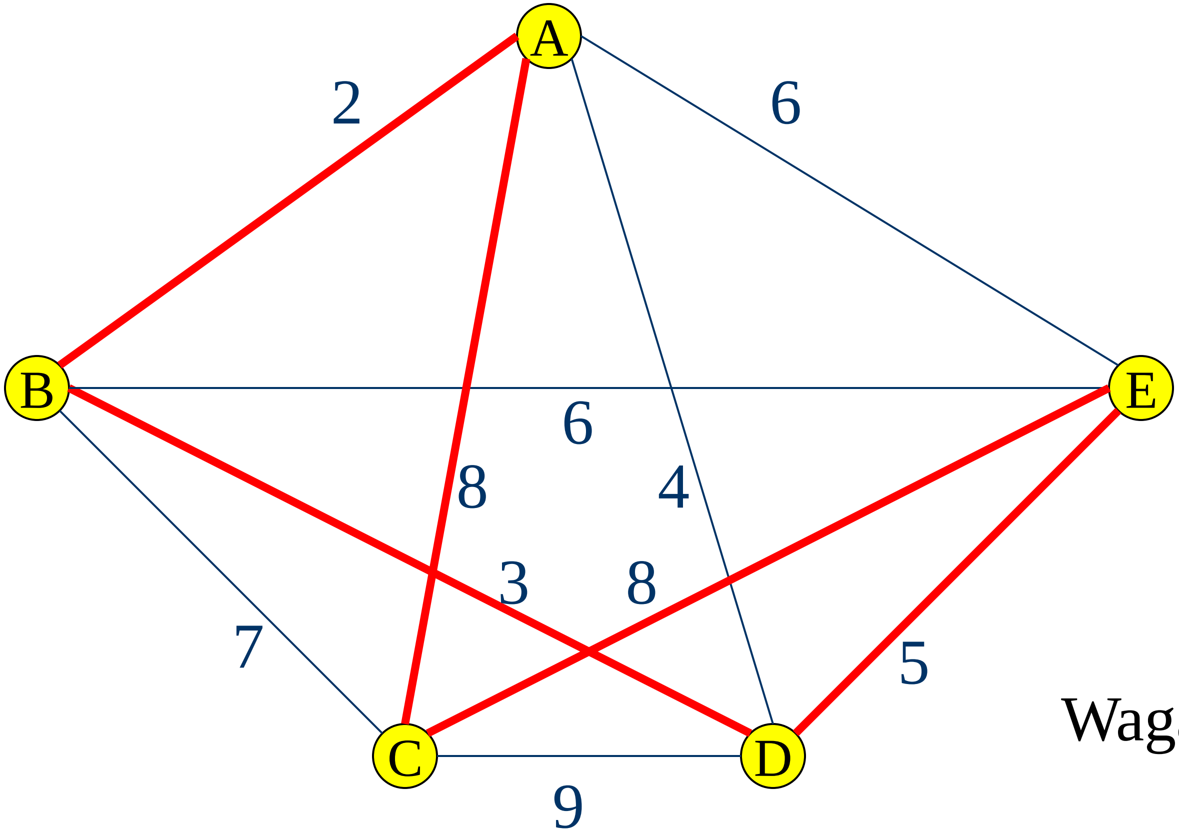
Sformułowanie problemu w języku teorii grafów

Rysujemy graf. Wierzchołki tego grafu odpowiadają miastom, krawędzie łączącym je drogom, a waga każdej krawędzi jest długością odpowiedniej drogi. Zadanie polega na znalezieniu cyklu Hamiltona o najmniejszej całkowitej wadze w danym grafie.

Przykład



Przykład



Waga drogi = 26

O przyjaciołach i politykach

O przyjaciołach i politykach

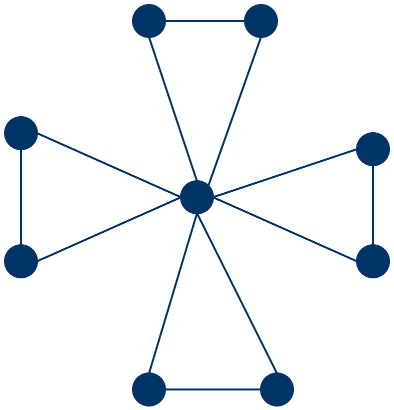
Przypuśćmy, że w pewnej grupie ludzi każda para przyjaciół ma dokładnie jednego wspólnego przyjaciela. Wtedy z pewnością istnieje osoba („polityk”), która jest przyjacielem wszystkich.

Sformułowanie problemu w języku teorii grafów

Osoby z rozważanej grupy utożsamiamy z wierzchołkami grafu. Dwa wierzchołki łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, kiedy odpowiednie osoby się przyjaźnią. Zakładamy, że przyjaźń jest zawsze obustronna, tzn. jeśli u jest przyjacielem v, to v jest przyjacielem u.

Twierdzenie o przyjaźni

Przypuśćmy, że G jest grafem, w którym dowolna para wierzchołków ma dokładnie jednego wspólnego sąsiada. Istnieje wówczas wierzchołek, który sąsiaduje ze wszystkimi innymi wierzchołkami.



Kolorowanie grafów

Kolorowanie wierzchołków

Jeśli G jest grafem bez pętli, to mówimy, że

G jest grafem k-kolorowalnym,

jeśli każdemu wierzchołkowi możemy przypisać jeden z kolorów w taki sposób, by sąsiednie wierzchołki mały różne kolory.

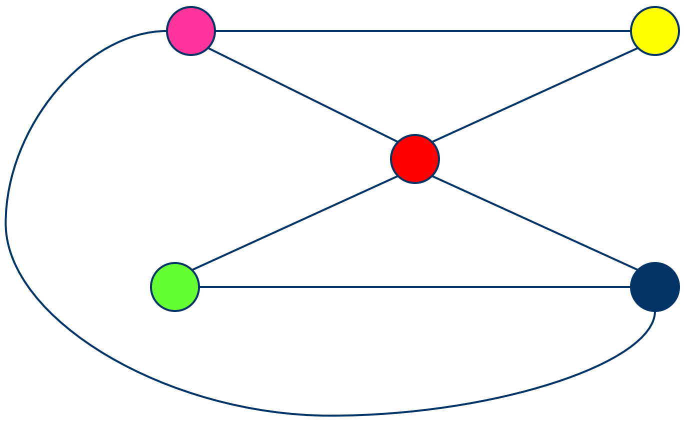
Jeśli graf G jest k-kolorowalny, ale nie jest (k-1) - kolorowalny, to mówimy, że jest on

k-chromatyczny

lub, że jego liczba chromatyczna jest równa k.

Twierdzenie

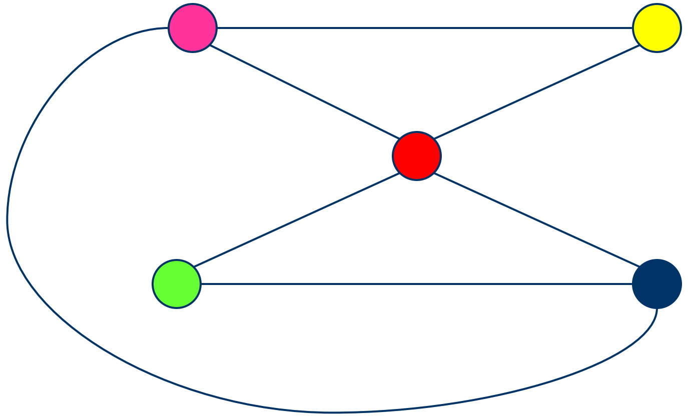
Jeśli G jest grafem prostym, w którym największym stopniem wierzchołka jest k, to graf G jest (k+1)-kolorowalny.

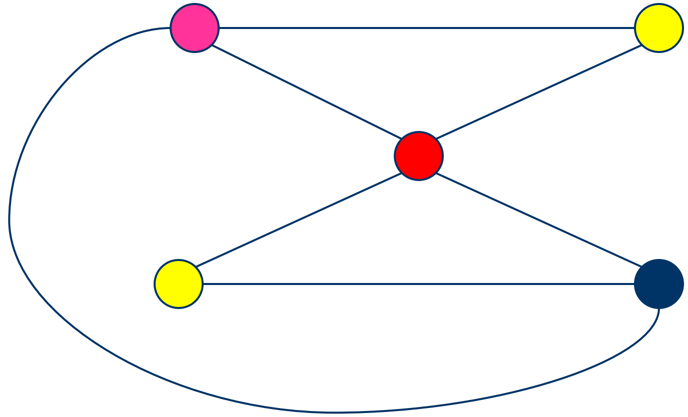


Zagadnienie czterech barw

Twierdzenie (Appel i Haken, 1976)

Każdy planarny graf prosty jest 4-kolorowalny.



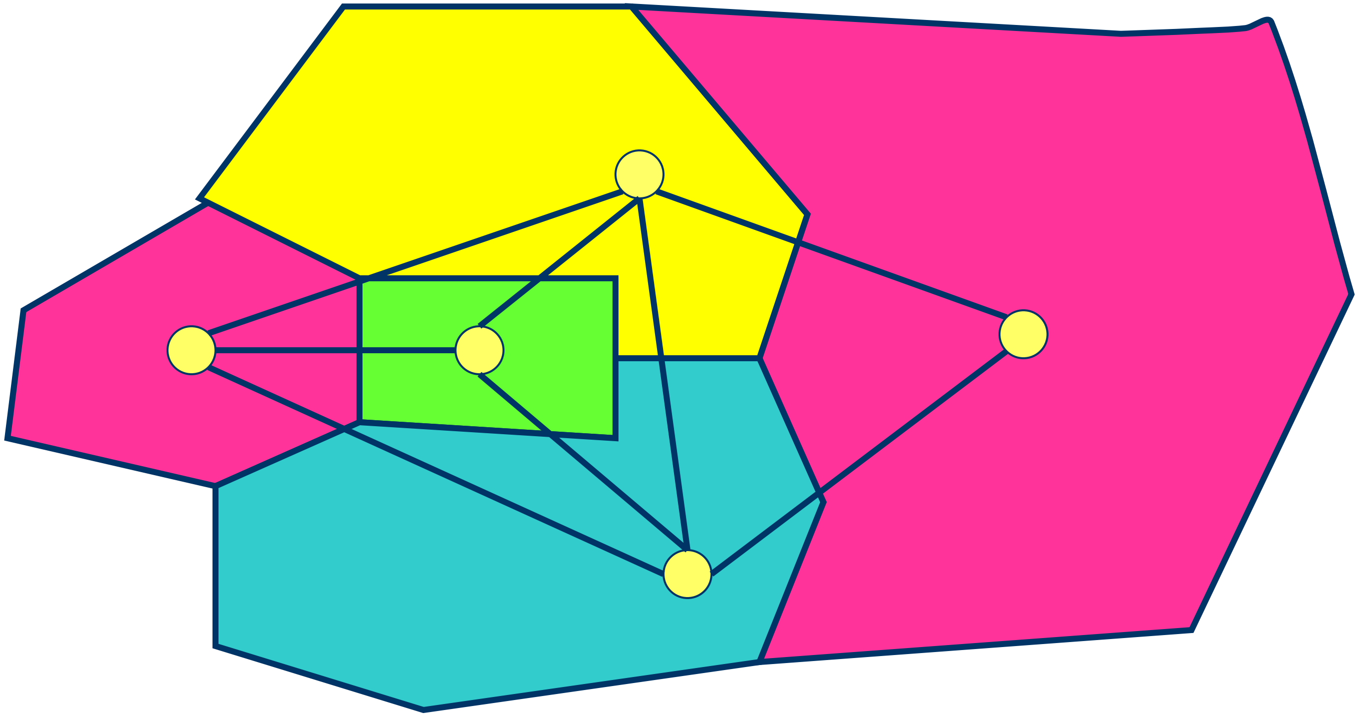


Kolorowanie map

Czy używając jedynie czterech barw można państwa na dowolnej mapie płaskiej pokolorować w taki sposób, by każde dwa państwa mające wspólny odcinek granicy (nie zaś tylko jeden punkt) różniły się kolorem?

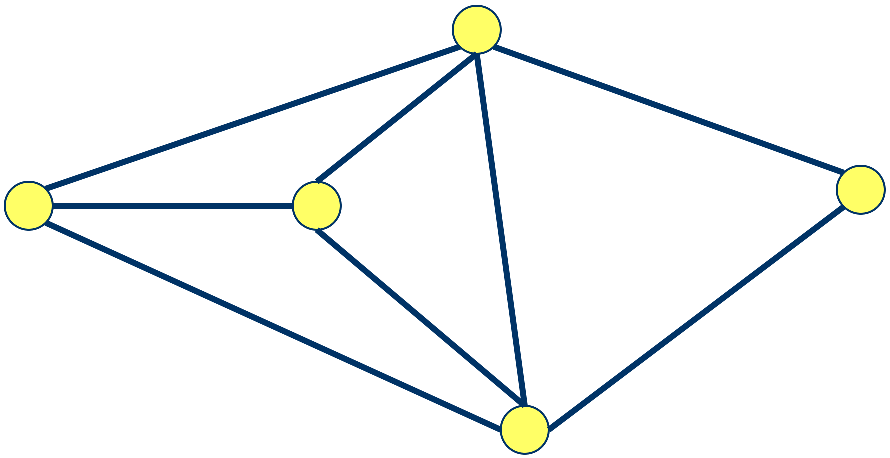
Twierdzenie o czterech barwach

Każda mapa jest cztero-kolorowalna.



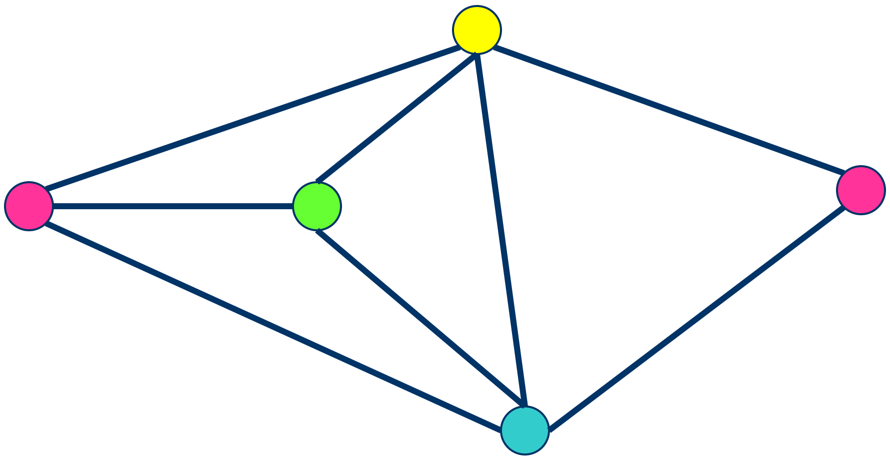
Twierdzenie o czterech barwach

Każda mapa jest cztero-kolorowalna.



Twierdzenie o czterech barwach

Każda mapa jest cztero-kolorowalna.



Strażnicy w muzeum

Strażnicy w muzeum

Problem postawiony przez Victora Klee w 1973 r.

Przypuśćmy, że dyrektor muzeum chciałby mieć pewność, że wszystkie punkty muzeum znajdują się stale pod obserwacją jednego ze strażników. Strażnicy stoją na ustalonych posterunkach, ale mogą się obracać dookoła. Ilu strażników jest potrzebnych?

Twierdzenie o galerii sztuki

Do pilnowania dowolnego wielokątnego muzeum o n ścianach wystarczy

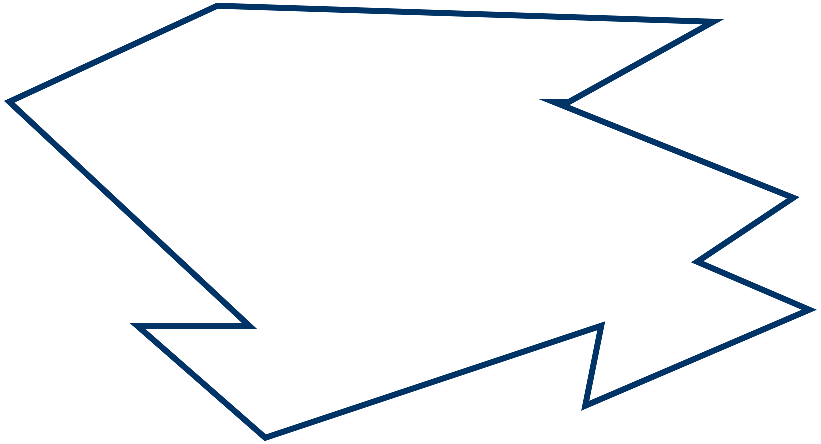
$\lfloor n/3 \rfloor$

strażników.

$\lfloor x \rfloor$ - oznacza część całkowitą liczby x

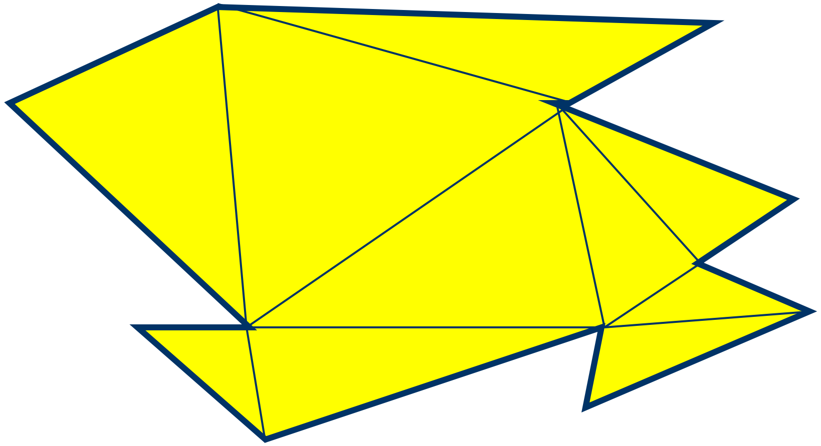
Dowód (autorstwa Steve’a Fiska)

Najpierw rysujemy n-3 nie przecinające się przekątne, wybierając je tak, by dokonać triangularyzacji wnętrz muzeum.



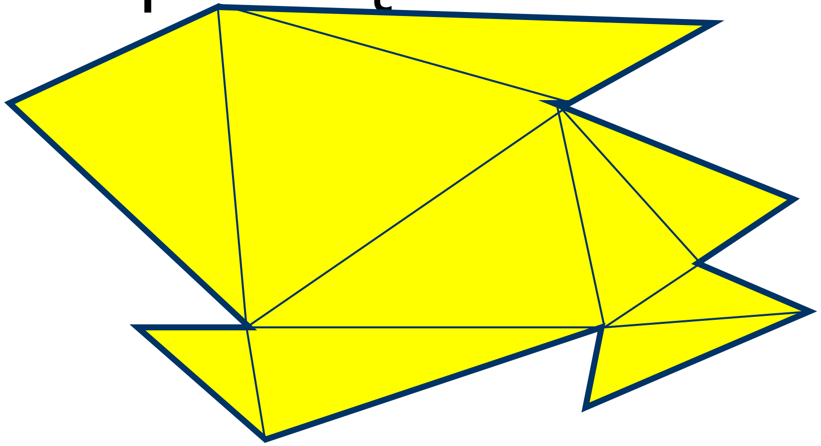
Dowód (autorstwa Steve'a Fiska)

Najpierw rysujemy n-3 nie przecinające się przekątne, wybierając je tak, by dokonać triangularyzacji wnętrz muzeum.



Dowód (autorstwa Steve'a Fiska)

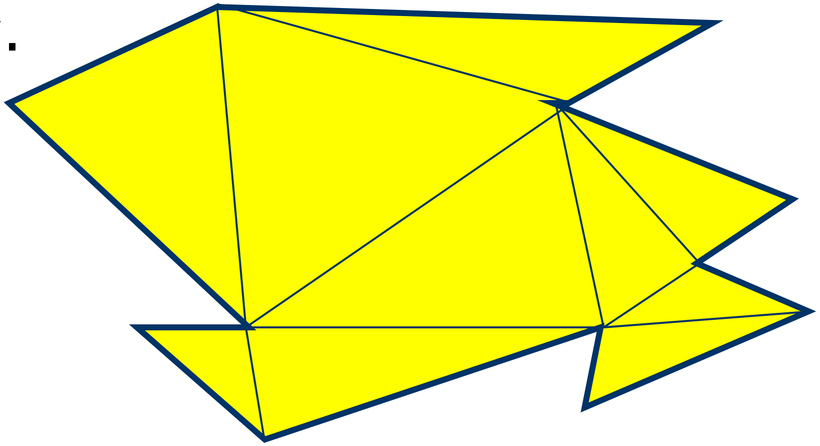
Powstała figura może być traktowana jako graf, w którym wierzchołkami są narożniki muzeum, a krawędziami będą ściany i narysowane przekątne.



Dowód (autorstwa Steve’a Fiska)

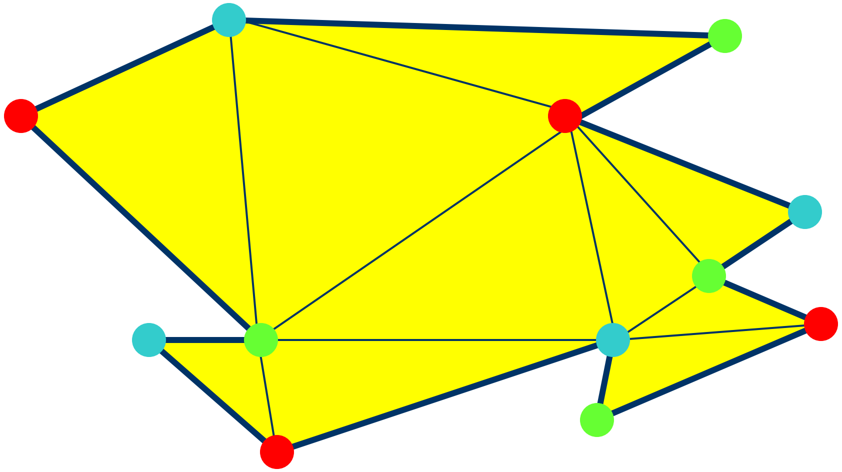
Ten graf jest trójkolorowalny.

- gdy n=3 – oczywiste
- gdy n>3 – wybieramy 2 dowolne wierzchołki u i v połączone przekątną. Dzieli ona cały graf na 2 mniejsze tego samego typu. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej i stwierdzamy, że każdy z nich jest 3-kolorowalny. Łącząc oba kolorowania stwierdzamy, że cały graf jest 3-kolorowalny.



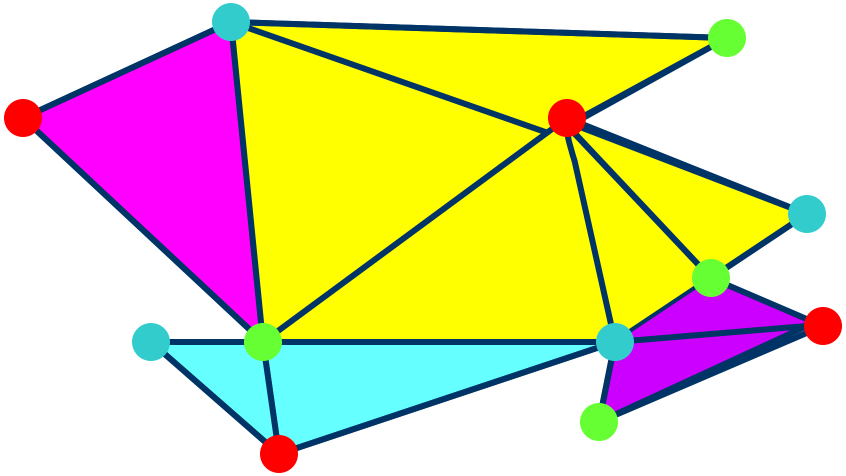
Dowód (autorstwa Steve'a Fiska)

Mamy n wierzchołków pomalowanych 3 kolorami, więc istnieje kolor, którym pomalowano nie więcej niż $\lfloor n/3 \rfloor$ wierzchołków.



Dowód (autorstwa Steve'a Fiska)

Strażników należy ustawić właśnie w tych wierzchołkach. Każdy z trójkątów ma wierzchołek tego koloru, a zatem każdego trójkąta pilnuje co najmniej jeden strażnik.



Problem otwarty

Przypuśćmy, ze każdy strażnik spaceruje wzdłuż jednej ze ścian muzeum i widzi wszystko, co można zobaczyć z dowolnego punktu leżącego gdziekolwiek na tej ścianie. Ilu (najmniej) takich spacerujących strażników potrzeba, by zapewnić ochronę muzeum?

Dziękuję za uwagę!